

**Script** generated by TTT

Title: Meixner: test2 (30.01.2013)

Date: Wed Jan 30 17:47:50 CET 2013

Duration: 63:27 min

Pages: 29

WS 2012/13

## Zentralübung zur Vorlesung Diskrete Strukturen (Prof. Mayr)

Dr. Werner Meixner

Fakultät für Informatik  
TU München

<http://www14.in.tum.de/lehre/2012WS/ds/uebung/>

30. Januar 2013

## ZÜ XII

### Übersicht:

- Übungsbetrieb:** Klausur am 16. Februar  
Termin, Ort, Anmeldung, Ablauf, Code
- Thema:** Eulersche Polyederformel
- Vorbereitung:** auf TA Blatt 14

## 1. Übungsbetrieb: Klausur am 16. Februar

### 1.1 Termin und Ort

Zeit: Samstag, 16. Februar, 11 – 13.30 Uhr  
Ort: Hörsäle MW 0001, MW 2001, MW 1801  
MI HS1, Interim HS1.

Bitte mindestens **15 Minuten vor Beginn** im Hörsaal erscheinen!

#### Platzverteilung:

Die Zuordnung der Teilnehmer auf die Hörsäle erfolgt nach Abschnitten des Alphabets siehe Übungswebseite ab 13. Februar.

Die Verteilung auf Sitzplätze wird den Listen zu entnehmen sein, die an den Hörsaaeingängen aushängen werden.

# 1. Übungsbetrieb: Klausur am 16. Februar

## 1.1 Termin und Ort

Zeit: Samstag, 16. Februar, 11 – 13.30 Uhr  
Ort: Hörsäle MW 0001, MW 2001, MW 1801  
MI HS1, Interim HS1.

Bitte mindestens **15 Minuten vor Beginn** im Hörsaal erscheinen!

### Platzverteilung:

Die Zuordnung der Teilnehmer auf die Hörsäle erfolgt nach Abschnitten des Alphabets siehe [Übungswebseite ab 13. Februar](#).

Die Verteilung auf Sitzplätze wird den Listen zu entnehmen sein, die an den Hörsaleingängen aushängen werden.

## 1.2 Anmeldung

Eine **Anmeldung** für die Endterm erfolgte über TUMonline oder in Sonderfällen persönlich am Infopoint.

## 1.3 Ablauf

Es nicht erlaubt, Unterlagen zu benutzen, außer einem persönlich handbeschriebenen DIN A4 Blatt (beidseitig)

Fragen während der Klausur sind erlaubt, aber Antworten werden, falls notwendig, nur als Hörsaalansage gegeben.

## 1.4 Code

Code: 

--	--	--	--	--	--	--	--

Bitte 8-stelligen **Zifferncode** (nicht ausschließlich die Null) eintragen, falls Sie Ihr Ergebnis frühzeitig erfahren wollen.

## 2. Thema: Eulersche Polyederformel

Eine der interessantesten Verallgemeinerungen des Begriffs der Bäume, sind die planaren Graphen.

Für planare Graphen  $G = (V, E)$  mit der Menge  $K$  von Komponenten und der Menge  $R_i$  von inneren Gebieten gilt die Eulersche Polyederformel:

$$|E| + |K| = |V| + |R_i| \quad (1)$$

Falls man das äußere Gebiet zu den inneren Gebieten hinzunimmt und die Menge aller Gebiete  $R$  betrachtet, dann lautet die Polyederformel wie folgt:

$$|E| + |K| = |V| + |R| - 1 \quad (2)$$

Aufbau planarer Graphen in der Ebene:

	$ E $	+	$ K $	=	$ V $	+	$ R_i $
$G = \emptyset$ :	0	+	0	=	0	+	0
+ $v$ Knoten:	0	+	$v$	=	$v$	+	0
+ $b$ Brücken:	$b$	+	$v - b$	=	$v$	+	0
+ $t$ Trennkanten:	$b + t$	+	$v - b$	=	$v$	+	$t$
Gesamt:	$e$	+	$k$	=	$v$	+	$r_i$
Einbettung:	$e$	+	$k$	=	$v$	+	$r - 1$

Aufbau planarer Graphen in der Ebene:

	$ E $	+	$ K $	=	$ V $	+	$ R_i $
$G = \emptyset$ :	0	+	0	=	0	+	0
+ $v$ Knoten:	0	+	$v$	=	$v$	+	0
+ $b$ Brücken:	$b$	+	$v - b$	=	$v$	+	0
+ $t$ Trennkanten:	$b + t$	+	$v - b$	=	$v$	+	$t$
Gesamt:	$e$	+	$k$	=	$v$	+	$r_i$
Einbettung:	$e$	+	$k$	=	$v$	+	$r - 1$

Bemerkung:

- In der Zeichenebene kann man jeder Kante 2 Seiten zuordnen.
- Jede Kantenseite grenzt an genau ein Gebiet.
- Für jedes Gebiet kann man die angrenzenden Kantenseiten zählen.
- Die Ebene zerfällt in endlich viele disjunkte Gebiete und deren Ränder.

Ungleichungen:

$$|E| \leq 3|V| - 6,$$

$$|E| \leq 2|V| - 4 \quad (\text{bipartite Graphen})$$

Aufbau planarer Graphen in der Ebene:

	$ E $	+	$ K $	=	$ V $	+	$ R_i $
$G = \emptyset :$	0	+	0	=	0	+	0
+ $v$ Knoten :	0	+	$v$	=	$v$	+	0
+ $b$ Brücken :	$b$	+	$v - b$	=	$v$	+	0
+ $t$ Trennkanten :	$b + t$	+	$v - b$	=	$v$	+	$t$
Gesamt :	$e$	+	$k$	=	$v$	+	$r_i$
Einbettung :	$e$	+	$k$	=	$v$	+	$r - 1$

Bemerkung:

- In der Zeichenebene kann man jeder Kante 2 Seiten zuordnen.
- Jede Kantenseite grenzt an genau ein Gebiet.
- Für jedes Gebiet kann man die angrenzenden Kantenseiten zählen.
- Die Ebene zerfällt in endlich viele disjunkte Gebiete und deren Ränder.

Ungleichungen:

$$|E| \leq 3|V| - 6,$$

$$|E| \leq 2|V| - 4 \quad (\text{bipartite Graphen})$$

### 3. Vorbereitung auf TA Blatt 14

#### 3.1 VA 1

Wir untersuchen den vollständigen bipartiten Graph  $K_{3,3}$ :

- Geben Sie 2 Unterteilungen des  $K_{3,3}$  mit 7 bzw. 8 Knoten an.
- Man beweise: Entfernt man aus dem  $K_{3,3}$  eine beliebige Kante, dann ist der entstehende Graph planar.

Ein *vollständiger bipartiter Graph*  $K_{m,n}$  für  $m, n \in \mathbb{N}$  ist ein bipartiter Graph mit Knotenmenge  $V = V_1 \cup V_2$  und Kantenmenge  $E = \{\{a, b\}; a \in V_1, b \in V_2\}$ , wobei  $V_1$  und  $V_2$  disjunkt sind mit  $m = |V_1|$  und  $n = |V_2|$  Elementen.

Da ein  $K_{m,n}$  bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist, sprechen wir gelegentlich auch von „dem“ Graphen  $K_{m,n}$ .

### 2. Thema: Eulersche Polyederformel

Eine der interessantesten Verallgemeinerungen des Begriffs der Bäume, sind die planaren Graphen.

Für planare Graphen  $G = (V, E)$  mit der Menge  $K$  von Komponenten und der Menge  $R$  von inneren Gebieten gilt die Eulersche Polyederformel:

$$|E| + |K| = |V| + |R| \quad (1)$$

Falls man das äußere Gebiet zu den inneren Gebieten hinzunimmt und die Menge aller Gebiete  $R$  betrachtet, dann lautet die Polyederformel wie folgt:

$$|E| + |K| = |V| + |R| - 1 \quad (2)$$

### 3. Vorbereitung auf TA Blatt 14

#### 3.1 VA 1

Wir untersuchen den vollständigen bipartiten Graph  $K_{3,3}$ .

- Geben Sie 2 Unterteilungen des  $K_{3,3}$  mit 7 bzw. 8 Knoten an.
- Man beweise: Entfernt man aus dem  $K_{3,3}$  eine beliebige Kante, dann ist der entstehende Graph planar.

Ein *vollständiger bipartiter Graph*  $K_{m,n}$  für  $m, n \in \mathbb{N}$  ist ein bipartiter Graph mit Knotenmenge  $V = V_1 \cup V_2$  und Kantenmenge  $E = \{\{a,b\}; a \in V_1, b \in V_2\}$ , wobei  $V_1$  und  $V_2$  disjunkt sind mit  $m = |V_1|$  und  $n = |V_2|$  Elementen.

Da ein  $K_{m,n}$  bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist, sprechen wir gelegentlich auch von „dem“ Graphen  $K_{m,n}$ .

- Man beweise: Entfernt man aus dem  $K_{3,3}$  eine beliebige Kante, dann ist der entstehende Graph **planar**.

Lösung:

Entfernt man aus dem  $K_{3,3}$  eine Kante, dann kann der resultierende Graph  $R$  natürlich keine Unterteilung des  $K_{3,3}$  mehr enthalten, weil die Anzahl der Kanten dann zu gering ist.

Aber auch eine Unterteilung des  $K_5$  kann nicht mehr in  $R$  enthalten sein, weil der  $K_5$  ja 10 Kanten enthält und jede Unterteilung von  $K_5$  mehr als 10 Kanten enthalten müsste.

$R$  ist also nach dem Satz von Kuratowski planar.

#### 3.2 VA 2

Beweisen oder widerlegen Sie:

- In jedem nichtleeren planaren Graph gibt es einen Knoten der höchstens Grad 5 hat.
- Es gibt einen 5-regulären planaren Graph.

Wir beweisen:

- In jedem nichtleeren planaren Graph gibt es einen Knoten der höchstens Grad 5 hat.

Lösung:

Sei  $G = (V, E)$  ein planarer Graph. Dann haben wir zu zeigen, dass ein Knoten  $x$  mit  $\deg(x) \leq 5$  existiert.

Wir führen einen Widerspruchsbeweis, indem wir annehmen, dass alle Knoten aus  $V$  mindestens den Grad 6 besitzen, d. h.  $\deg(x) \geq 6$  gilt, und diese Annahme zum Widerspruch führen.

Sei also  $\deg(x) \geq 6$  für alle  $x \in V$ .

Es folgt zunächst  $|V| \geq 3$ .

Die Summe aller Gradzahlen von Knoten in  $G$  ist gleich dem Doppelten der Anzahl der Kanten, d.h. es gilt

$$\sum_{x \in V} \deg(x) = 2 \cdot |E|.$$

Mithin gilt

$$2 \cdot |E| = \sum_{x \in V} \deg(x) \geq |V| \cdot 6, \quad \text{d.h.} \quad |E| \geq 3|V|.$$

Andererseits gilt für planare Graphen mit mindestens 3 Knoten nach einem Satz über planare Graphen (siehe Buch von Steger)

$$|E| \leq 3 \cdot |V| - 6 < 3 \cdot |V|.$$

Widerspruch!

Wir beweisen:

- ② Es gibt einen 5-regulären planaren Graph.

### 3.3 VA 3

Sei  $V = \{a, b, c, d, e\}$ . Wir betrachten einen vollständigen Graph  $G = (V, E)$  mit Kanten, deren ganzzahlige Gewichte durch die folgende Tabelle definiert sind.

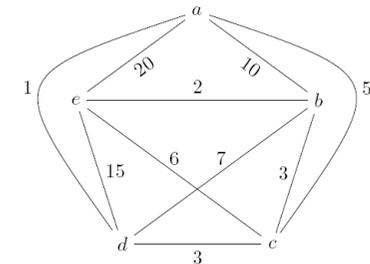
	a	b	c	d	e
a	.	10	5	1	20
b		.	3	7	2
c			.	3	6
d				.	15



### 3.3 VA 3

Sei  $V = \{a, b, c, d, e\}$ . Wir betrachten einen vollständigen Graph  $G = (V, E)$  mit Kanten, deren ganzzahlige Gewichte durch die folgende Tabelle definiert sind.

	a	b	c	d	e
a	.	10	5	1	20
b		.	3	7	2
c			.	3	6
d				.	15



- 1 Berechnen Sie mit Hilfe des Algorithmus nach Dijkstra die Entfernung des Knotens  $a$  zu allen anderen 4 Knoten von  $G$ !
- 2 In welcher Reihenfolge werden die Entfernungen nach Dijkstra berechnet? Das heißt, in welcher Reihenfolge werden die Knoten aus  $F$  entfernt?  
Protokollieren Sie Ihre Berechnungen geeignet!
- 3 Welcher Pfad verbindet den Knoten  $a$  mit Knoten  $e$  mit minimaler Gewichtesumme?

*Erinnerung:* In einem kantengewichteten Graphen ist das Gewicht eines Weges die Summe seiner Kantengewichte. Die Entfernung zwischen zwei Knoten  $u$  und  $v$  ist dann das minimale Gewicht eines Weges zwischen  $u$  und  $v$ .

Lösung:

Mit dem Algorithmus von Dijkstra berechnet man sukzessive die Entfernungen  $u_1, u_2, \dots$  vom Startknoten  $s$  aus zu Knoten  $k_1, k_2, \dots$  beginnend bei dem zum Startknoten nächststehenden Knoten.

	a	b	c	d	e
a	.	10	5	<u>1</u>	20
		8	<u>4</u>		16
		<u>7</u>			10
					<u>9</u>
b	$u_3 = 7$	.	3	7	2
c	$u_2 = 4$		.	3	6
d	$u_1 = 1$			.	15
e	$u_4 = 9$				.

### 3.4 Tutoraufgabe 2

Die Lösung der Tutoraufgaben von Blatt 14 finden Sie ab Samstag im Netz.

Arbeiten Sie insbesondere Tutoraufgabe 2 vor der Übungsstunde der nächsten Woche selbstständig durch.

### Tutoraufgabe 2:

- 1 Zeigen Sie, dass kein zusammenhängender bipartiter Graph  $B$  einen vollständigen Graph  $K_3$  als Teilgraph enthält, d. h., dass jeder zusammenhängende bipartite Graph „dreiecksfrei“ ist.
- 2 Geben Sie einen Spannbaum des vollständigen bipartiten Graphen  $K_{3,5}$  an. Nummerieren Sie dabei die Knoten geeignet. (Übersichtliche Zeichnung genügt).
- 3 Geben Sie einen planaren Teilgraph  $B = (V, E)$  des  $K_{3,5}$  mit  $|V| = 8$  an, so dass die folgende Gleichung erfüllt ist. (Übersichtliche Zeichnung genügt).

$$|E| = 2|V| - 4.$$

- 4 Zeigen Sie mit Hilfe der Eulerschen Polyederformel (Anzahl der Gebiete ist gleich Anzahl der Kanten minus Anzahl der Knoten plus 2) für zusammenhängende bipartite planare Graphen  $B = (V, E)$  falls  $|E| \geq 2$  die Ungleichung

$$|E| \leq 2|V| - 4.$$

Viel Erfolg bei der Endterm!