

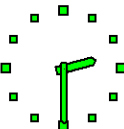
**Script** generated by TTT

Title: Meixner: ZUE\_THEO (07.05.2015)

Date: Thu May 07 14:30:23 CEST 2015

Duration: 90:57 min

Pages: 30



SS 2015



# Zentralübung zur Vorlesung Theoretische Informatik

Dr. Werner Meixner

Fakultät für Informatik  
TU München

<http://www14.in.tum.de/lehre/2015SS/theo/uebung/>

7. Mai 2015

 ZÜ THEO  
©Dr. Werner Meixner 




## ZÜ IV

Übersicht:

1. **Übungsbetrieb** Fragen, Probleme?
2. **Thema** Pump Lemma
3. **Vorbereitung** TA Blatt 4



 ZÜ THEO  
©Dr. Werner Meixner 1/21 



## 1. Fragen, Anregungen?

Aktuelle Fragen?

Achtung **Terminänderung**:  
Blatt 7 wird am 28. Mai ausgegeben und  
am 28. Mai findet eine Zentralübung statt.

 ZÜ THEO  
©Dr. Werner Meixner 1 Fragen, Anregungen? 2/21 

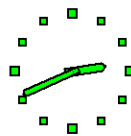
## 2. Thema: Pump Lemma

Das Pumping Lemma wird in der VL in drei Varianten behandelt:

1. Pumping Lemma für reguläre Sprachen
2. Pumping Lemma für kontextfreie Sprachen
3. Ogden-Lemma für kontextfreie Sprachen

In jedem Fall ist das Lemma eine Aussage über die **Abgeschlossenheit** der Sprachen gegenüber gewissen unendlichen Mengen mit einer gewissen iterativen Struktur.

**Allerdings** gibt es nichtreguläre bzw. nichtkontextfreie Sprachen, die diese Abgeschlossenheitseigenschaften ebenfalls besitzen.



Sei  $L \subseteq \Sigma^*$  regulär bzw. kontextfrei. Dann gibt es eine reguläre bzw. kontextfreie Pumping-Lemma-Zahl  $n \in \mathbb{N}$ ,

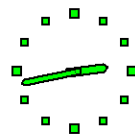
d.h., dass für alle  $z \in L$  mit  $|z| \geq n$  gilt:

$z$  ist zerlegbar in  
 $z = wxy$ ,  
so dass:

1.  $|x| \geq 1$
  2.  $|wx| \leq n$
- und
3.  $\forall i \geq 0: wx^i y \in L$

bzw.  $z$  ist zerlegbar  
in  $z = uvwxy$ ,  
so dass:

1.  $|vx| \geq 1$
  2.  $|vwx| \leq n$
- und
3.  $\forall i \geq 0: uv^i wx^i y \in L$



Sei  $L \subseteq \Sigma^*$  regulär bzw. kontextfrei. Dann gibt es eine reguläre bzw. kontextfreie Pumping-Lemma-Zahl  $n \in \mathbb{N}$ ,

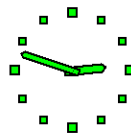
d.h., dass für alle  $z \in L$  mit  $|z| \geq n$  gilt:

$z$  ist zerlegbar in  
 $z = wxy$ ,  
so dass:

1.  $|x| \geq 1$
  2.  $|wx| \leq n$
- und
3.  $\forall i \geq 0: wx^i y \in L$

bzw.  $z$  ist zerlegbar  
in  $z = uvwxy$ ,  
so dass:

1.  $|vx| \geq 1$
  2.  $|vwx| \leq n$
- und
3.  $\forall i \geq 0: uv^i wx^i y \in L$



Sei  $L \subseteq \Sigma^*$  regulär bzw. kontextfrei. Dann gibt es eine reguläre bzw. kontextfreie Pumping-Lemma-Zahl  $n \in \mathbb{N}$ ,

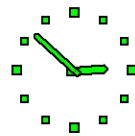
d.h., dass für alle  $z \in L$  mit  $|z| \geq n$  gilt:

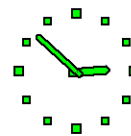
$z$  ist zerlegbar in  
 $z = wxy$ ,  
so dass:

1.  $|x| \geq 1$
  2.  $|wx| \leq n$
- und
3.  $\forall i \geq 0: wx^i y \in L$

bzw.  $z$  ist zerlegbar  
in  $z = uvwxy$ ,  
so dass:

1.  $|vx| \geq 1$
  2.  $|vwx| \leq n$
- und
3.  $\forall i \geq 0: uv^i wx^i y \in L$





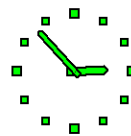
Wir definieren eine Kennzeichnung  $M$  von Vorkommen von Buchstaben in einem Wort  $w$  als

### Markierung von $m$ Vorkommen.

Eine Markierung von 3 Buchstaben in  $w = abbaced$  ist beispielsweise durch  $w = abbaced$  gegeben.

Die Länge  $|w|_M$  eines Wortes  $w$  bezüglich einer Markierung  $M$  ist dann die Anzahl von Markierungen in  $w$ .

Beispiel:  $|abbaced|_M = 3$ .



Sei  $L \subseteq \Sigma^*$  regulär bzw. kontextfrei. Dann gibt es eine reguläre bzw. kontextfreie Pumping-Lemma-Zahl  $n \in \mathbb{N}$ ,

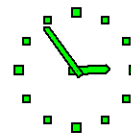
d.h., dass für alle  $z \in L$  mit  $|z| \geq n$  gilt:

$z$  ist zerlegbar in  $z = wxy$ ,  
so dass:

- $|x| \geq 1$
- $|wx| \leq n$
- und
- $\forall i \geq 0: w x^i y \in L$

bzw.  $z$  ist zerlegbar in  $z = uvwxy$ ,  
so dass:

- $|vx| \geq 1$
- $|vwx| \leq n$
- und
- $\forall i \geq 0: u v^i w x^i y \in L$



### Ogden-Lemma:

Sei  $L \subseteq \Sigma^*$  kontextfrei. Dann gibt es eine Zahl  $n \in \mathbb{N}$ , so dass

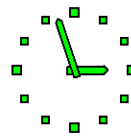
für alle  $z \in L$  mit  $|z| \geq n$  und für alle Markierungen  $M$  von  $m \geq n$  Buchstaben in  $z$ :

$z$  ist zerlegbar in  $z = uvwxy$ ,  
so dass:

- $|vx|_M \geq 1$
- $|vwx|_M \leq n$
- und
- $\forall i \geq 0: u v^i w x^i y \in L$

z.Vgl.  $z$  ist zerlegbar in  $z = uvwxy$ ,  
so dass:

- $|vx| \geq 1$
- $|vwx| \leq n$
- und
- $\forall i \geq 0: u v^i w x^i y \in L$



### Ogden-Lemma:

Sei  $L \subseteq \Sigma^*$  kontextfrei. Dann gibt es eine Zahl  $n \in \mathbb{N}$ , so dass

für alle  $z \in L$  mit  $|z| \geq n$  und für alle Markierungen  $M$  von  $m \geq n$  Buchstaben in  $z$ :

$z$  ist zerlegbar in  $z = uvwxy$ ,  
so dass:

- $|vx|_M \geq 1$
- $|vwx|_M \leq n$
- und
- $\forall i \geq 0: u v^i w x^i y \in L$

z.Vgl.  $z$  ist zerlegbar in  $z = uvwxy$ ,  
so dass:

- $|vx| \geq 1$
- $|vwx| \leq n$
- und
- $\forall i \geq 0: u v^i w x^i y \in L$

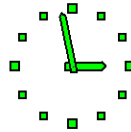


### Ogden-Lemma:

Sei  $L \subseteq \Sigma^*$  kontextfrei. Dann gibt es eine Zahl  $n \in \mathbb{N}$ , so dass

für alle  $z \in L$  mit  $|z| \geq n$  und

für alle Markierungen  $M$  von  $m \geq n$  Buchstaben in  $z$ :



$z$  ist zerlegbar  
in  $z = uvwxy$ ,  
so dass:

- $|vx|_M \geq 1$
- $|vwx|_M \leq n$

und

3.  $\forall i \geq 0: uv^iwx^iy \in L$

z.Vgl.

$z$  ist zerlegbar  
in  $z = uvwxy$ ,  
so dass:

- $|vx| \geq 1$
- $|vwx| \leq n$

und

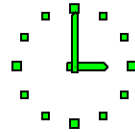
3.  $\forall i \geq 0: uv^iwx^iy \in L$



### 3. Vorbereitung TA Blatt 4

#### 3.1 VA 1

Gegeben sei die Sprache  $L = \{a^n \mid n = 2^k, k \in \mathbb{N}\}$ . Zeigen Sie, dass  $L$  nicht regulär ist.

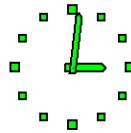


### Pump Lemma für reguläre Sprachen:

Sei  $L \subseteq \Sigma^*$  regulär. Dann gibt es eine reguläre

Pump Lemma-Zahl  $n \in \mathbb{N}$ ,

d.h., dass für alle  $z \in L$  mit  $|z| \geq n$  gilt:



$z$  ist zerlegbar in  
 $z = wxy$ ,  
so dass:

- $|x| \geq 1$
- $|wx| \leq n$

und

3.  $\forall i \geq 0: wx^iy \in L$



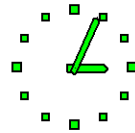
### Lösung

Wir beweisen durch Widerspruch und nehmen an, dass  $L$  regulär ist.

Sei  $n \geq 1$  eine Pumping-Lemma-Zahl für  $L$ . Wir nehmen sofort auch  $n > 2$  an, was einerseits zulässig ist und andererseits die unten benötigte Ungleichung  $2n < 2^n$  gültig macht.

Wir betrachten  $z = a^{2^n}$ .

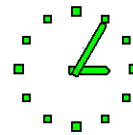
Dann gilt  $|z| \geq n$  und  $z \in L$ .





Pump Lemma für reguläre Sprachen:

Sei  $L \subseteq \Sigma^*$  regulär. Dann gibt es eine reguläre Pump Lemma-Zahl  $n \in \mathbb{N}$ , d.h., dass für alle  $z \in L$  mit  $|z| \geq n$  gilt:



$z$  ist zerlegbar in

$z = wxy$ ,

so dass:

1.  $|x| \geq 1$

2.  $|wx| \leq n$

und

3.  $\forall i \geq 0: wx^i y \in L$



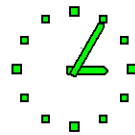
### Lösung

Wir beweisen durch Widerspruch und nehmen an, dass  $L$  regulär ist.

Sei  $n \geq 1$  eine Pumping-Lemma-Zahl für  $L$ . Wir nehmen sofort auch  $n > 2$  an, was einerseits zulässig ist und andererseits die unten benötigte Ungleichung  $2n < 2^n$  gültig macht.

Wir betrachten  $z = a^{2^n}$ .

Dann gilt  $|z| \geq n$  und  $z \in L$ .

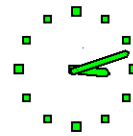


Nach Pumping-Lemma können wir  $z$  wie folgt zerlegen.

Sei  $z = uvw$  mit  $|uv| \leq n$  und  $v \neq \epsilon$ , so dass für alle  $i \in \mathbb{N}$  gilt  $uv^i w \in L$ .

Zunächst gilt  $v = a^r$  mit  $1 \leq r \leq n$ . Es folgt  $uw = a^{2^n - r}$  und  $uv \in L$ , d.h.  $a^{2^n - r} = a^{2^k}$ . und mithin  $2^n - r = 2^k$  für ein existierendes  $k \in \mathbb{N}$ .

Dies ist ein Widerspruch zur Tatsache, dass aus  $r \leq n < 2^{n-1}$  die Ungleichungen  $0 < 2^{n-1} - r$  und mithin  $2^{n-1} < 2 \cdot 2^{n-1} - r = 2^n - r < 2^n$  folgen.

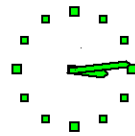


Nach Pumping-Lemma können wir  $z$  wie folgt zerlegen.

Sei  $z = uvw$  mit  $|uv| \leq n$  und  $v \neq \epsilon$ , so dass für alle  $i \in \mathbb{N}$  gilt  $uv^i w \in L$ .

Zunächst gilt  $v = a^r$  mit  $1 \leq r \leq n$ . Es folgt  $uw = a^{2^n - r}$  und  $uv \in L$ , d.h.  $a^{2^n - r} = a^{2^k}$ . und mithin  $2^n - r = 2^k$  für ein existierendes  $k \in \mathbb{N}$ .

Dies ist ein Widerspruch zur Tatsache, dass aus  $r \leq n < 2^{n-1}$  die Ungleichungen  $0 < 2^{n-1} - r$  und mithin  $2^{n-1} < 2 \cdot 2^{n-1} - r = 2^n - r < 2^n$  folgen.



### 3.2 VA 2

Für formale Sprachen  $L$  gibt es eine Äquivalenz  $\equiv_L$  über  $L$ . Diese Äquivalenzrelation hängt bei regulären Sprachen eng mit dem Begriff der Äquivalenz von Zuständen deterministischer endlicher Automaten zusammen.

Sei  $M = (Q, \Sigma, \delta, s_0, F)$  eine DFA.

Definition (Äquivalenz von Zuständen  $p, q \in Q$ )

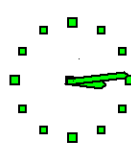
$$p \equiv_M q \iff \forall w \in \Sigma^* : (\delta(p, w) \in F \iff \delta(q, w) \in F).$$

Es gilt

$$p \equiv_M q \iff L_M(p) = L_M(q).$$

mit der Definition

$$L_M(p) := \{w \in \Sigma^* ; \delta(p, w) \in F\}.$$



### 3.2 VA 2

Für formale Sprachen  $L$  gibt es eine Äquivalenz  $\equiv_L$  über  $L$ . Diese Äquivalenzrelation hängt bei regulären Sprachen eng mit dem Begriff der Äquivalenz von Zuständen deterministischer endlicher Automaten zusammen.

Sei  $M = (Q, \Sigma, \delta, s_0, F)$  eine DFA.

Definition (Äquivalenz von Zuständen  $p, q \in Q$ )

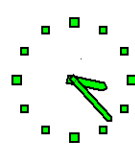
$$p \equiv_M q \iff \forall w \in \Sigma^* : (\hat{\delta}(p, w) \in F \iff \hat{\delta}(q, w) \in F).$$

Es gilt

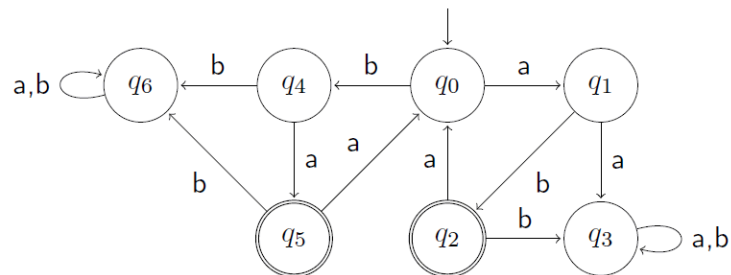
$$p \equiv_M q \iff L_M(p) = L_M(q).$$

mit der Definition

$$L_M(p) := \{w \in \Sigma^* ; \hat{\delta}(p, w) \in F\}.$$



Sei  $\Sigma = \{a, b\}$ . Der Automat  $M$  sei durch das folgende Diagramm gegeben. Zeigen Sie  $q_3 \not\equiv_M q_4$  und  $q_3 \equiv_M q_6$ .



### Lösung

$$\hat{\delta}(q_3, a) = q_3 \notin F, \text{ aber } \hat{\delta}(q_4, a) = q_5 \in F.$$

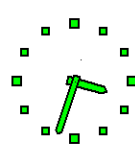
Damit ist die Definition von Äquivalenz nicht erfüllt, d.h. es gilt  $q_3 \not\equiv_M q_4$ .

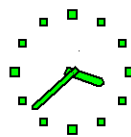
Alle von  $q_3$  bzw.  $q_6$  ausgehenden Übergänge führen wieder nach  $q_3$  bzw.  $q_6$ .

Das heißt, für alle  $w \in \Sigma^*$  gilt

$$\hat{\delta}(q_3, w) = q_3 \notin F \text{ und } \hat{\delta}(q_6, w) = q_6 \notin F$$

und damit ist  $q_3 \equiv_M q_6$ .



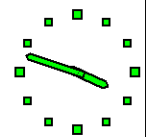


### 3.3 VA 3

Wir nennen eine Phrasenstrukturgrammatik  $G = (V, \Sigma, P, S)$  *nullierbar kontextfrei*, wenn alle Regeln aus  $P$  die folgende Form besitzen.

$$A \xrightarrow{p} \alpha \quad \text{mit} \quad A \in V, \Gamma = V \cup \Sigma, \alpha \in \Gamma^*.$$

$\Gamma^*$  heißt Menge der Satzformen über dem Vokabular  $\Gamma$ .



Sei  $G$  eine nullierbar kontextfreie Grammatik.

- 1 Man zeige für alle  $u, v, w \in \Gamma^*$  die Zerlegungseigenschaft

$$uw \xrightarrow{G} w \implies \exists u', v' \in \Gamma^* : u \xrightarrow{G}^* u' \wedge v \xrightarrow{G}^* v' \wedge u'v' = w.$$

- 2 Es gilt für alle  $u, v \in \Gamma^*$ ,  $a \in \Sigma$  und  $n \in \mathbb{N}_0$

$$uw \xrightarrow{G}^* a^n \implies \exists p, q \in \mathbb{N}_0 : p + q = n \wedge u \xrightarrow{G}^* a^p \wedge v \xrightarrow{G}^* a^q.$$



- 1 Man zeige für alle  $u, v, w \in \Gamma^*$  die Zerlegungseigenschaft

$$uw \xrightarrow{G} w \implies \exists u', v' \in \Gamma^* : u \xrightarrow{G}^* u' \wedge v \xrightarrow{G}^* v' \wedge u'v' = w.$$

#### Lösung

Wenn eine Produktion  $A \xrightarrow{p} \alpha$  zur Anwendung auf  $uw$  kommt, dann ist die *Anwendungsstelle* entweder in  $u$  oder in  $v$  (weil knf).

Falls die Anwendungsstelle in  $u$  liegt, dann gibt es  $x, y \in \Gamma^*$ , so dass gilt  $u = xAy$ . Dann folgt  $w = x\alpha yv$ .

Daraus folgt aber mit  $u' = x\alpha y$  und  $v' = v$ , dass gilt  $u \xrightarrow{G}^* u'$  und  $v \xrightarrow{G}^* v'$ , und insbesondere auch  $u'v' = w$ .

Entsprechendes gilt, falls die Anwendungsstelle der Produktion in  $v$  liegt.

Damit ist die Zerlegungseigenschaft bewiesen.



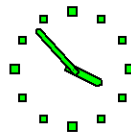
- 2 Es gilt für alle  $u, v \in \Gamma^*$ ,  $a \in \Sigma$  und  $n \in \mathbb{N}_0$

$$uw \xrightarrow{G}^* a^n \implies \exists p, q \in \mathbb{N}_0 : p + q = n \wedge u \xrightarrow{G}^* a^p \wedge v \xrightarrow{G}^* a^q.$$

#### Lösung

Die Aussage folgt leicht durch Induktion über die Länge  $k$  der Ableitung für  $uw \xrightarrow{G}^* a^n$ .

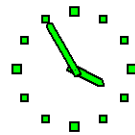
Für  $k = 0$  gilt  $uw = a^n$ . Daraus folgt aber unmittelbar  $u = a^p$  und  $v = a^q$  für geeignete  $p, q \in \mathbb{N}_0$  mit  $p + q = n$ . Wegen Reflexivität gilt dann trivialerweise  $u \xrightarrow{G}^* a^p$  und  $v \xrightarrow{G}^* a^q$ .



### 3.4 VA 4

Welche Symbole einer durch die folgenden Produktionen gegebenen Grammatik sind erzeugend, welche erreichbar, und welche nützlich?

$$\begin{aligned}
S &\rightarrow A \mid a, \\
A &\rightarrow BC, & B &\rightarrow AE \mid C, \\
C &\rightarrow aS, & D &\rightarrow aB \mid FS \\
E &\rightarrow EA, & F &\rightarrow Ca \mid a.
\end{aligned}$$

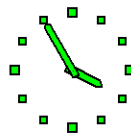


### Definitionen

Ein Nichtterminal  $A$  heißt

1. *erreichbar* gdw es eine Ableitung  $S \xrightarrow{*} \alpha A \beta$  gibt,
2. *erzeugend* gdw es eine Ableitung  $A \xrightarrow{*} w \in \Sigma^*$  gibt,
3. *nützlich* gdw es eine Ableitung  $S \xrightarrow{*} \alpha A \beta \xrightarrow{*} w \in \Sigma^*$  gibt.

Nützliche Nichtterminale sind erreichbar und erzeugend. Die Umkehrung gilt nicht notwendigerweise (Beweis?)



### Lösung:

$$\begin{aligned}
S &\rightarrow A \mid a, \\
A &\rightarrow BC, & B &\rightarrow AE \mid C, \\
C &\rightarrow aS, & D &\rightarrow aB \mid FS \\
E &\rightarrow EA, & F &\rightarrow Ca \mid a.
\end{aligned}$$

Alle Symbole außer  $E$  sind erzeugend.

Alle Symbole außer  $D$  und  $F$  sind erreichbar.

Die anderen Symbole sind nützlich, wie die folgende Ableitung zeigt:

$$S \rightarrow A \rightarrow BC \rightarrow CC \xrightarrow{2} aSaS \xrightarrow{2} aaaa$$