

Script generated by TTT

Title: Meixner: ZUE_THEO (16.04.2015)

Date: Thu Apr 16 14:30:42 CEST 2015

Duration: 82:22 min

Pages: 28

SS 2015

Zentralübung zur Vorlesung
Theoretische Informatik

Dr. Werner Meixner

Fakultät für Informatik
TU München

<http://www14.in.tum.de/lehre/2015SS/theo/uebung/>

16. April 2015

TUM ZÜ THEO ©Dr. Werner Meixner LEA

ZÜ I

Übersicht:

1. **Übungsbetrieb** Organisation der ZÜ
Ziele der ZÜ
2. **Themen** Hüllenoperationen
Abzählbarkeit
3. **Hin.Ti's** HA von Blatt 1
4. **Vorbereitung** TA von Blatt 1

TUM ZÜ THEO ©Dr. Werner Meixner 1/35 LEA

1. Übungsbetrieb

1.1 Organisation der Zentralübung

- **Zeit:** Do 14.30–15.55 **Ort:** MI HS1 F.L. Bauer

Ausnahmen:
Siehe Termine auf der Übungswebseite.

- **Webseite:**
<http://www14.in.tum.de/lehre/2015SS/theo/uebung/>

TUM ZÜ THEO ©Dr. Werner Meixner 1.1 Organisation der Zentralübung 2/35 LEA



- Kontakt Dr. W. Meixner:
 - Epost: meixner@in.tum.de
 - Telefon: 089 289 17713
 - Raum: MI 03.09.040
 - Sprechstunde: n.V. Donnerstag 12 - 12.30 Uhr
- Material:
 - Gliederung auf Folien (siehe Webseite)
 - Ausarbeitung auf Tafel oder Handfolie
 - ttt-Aufzeichnung
 - Hin.Ti's



1.2 Ziele der Zentralübung



Diese sind: Spezielle und Allgemeine **didaktische Ziele** im Sinne einer Verstärkung des Erfolges beim Studium der THEO.

Spezielle:

- **Vorbereitung und Nachbesprechung** für Tutor- bzw. Hausaufgaben der THEO Übungsblätter.
- **Persönliche Kommunikation**

Allgemeine:

- **Brückenschlag** zu verwandten Vorlesungen in der Grundausbildung.
- Informelle **Metasprache** und übergeordnete **Interpretation**
- **Thema der Woche.**



1.2 Ziele der Zentralübung



Diese sind: Spezielle und Allgemeine **didaktische Ziele** im Sinne einer Verstärkung des Erfolges beim Studium der THEO.

Spezielle:

- **Vorbereitung und Nachbesprechung** für Tutor- bzw. Hausaufgaben der THEO Übungsblätter.
- **Persönliche Kommunikation**

Allgemeine:

- **Brückenschlag** zu verwandten Vorlesungen in der Grundausbildung.
- Informelle **Metasprache** und übergeordnete **Interpretation**
- **Thema der Woche.**



2. Themen

Grundlegende Themen der theoretischen Informatik sind Berechenbarkeit und Abgrenzung der Größenordnung von Problemen.

Hüllenoperationen und Abzählbarkeit gehören zu diesen Themen.

Insbesondere die Beweismethode der sogenannten **strukturellen Induktion** gehören zum Thema Hüllenoperationen und andererseits gehören rekursive Aufzählbarkeit zum Thema Abzählbarkeit.



2. Themen

Grundlegende Themen der theoretischen Informatik sind Berechenbarkeit und Abgrenzung der Größenordnung von Problemen.

Hüllenoperationen und Abzählbarkeit gehören zu diesen Themen.

Insbesondere die Beweismethode der sogenannten **strukturellen Induktion** gehören zum Thema Hüllenoperationen und andererseits gehören rekursive Aufzählbarkeit zum Thema Abzählbarkeit.



2.1 Hüllenoperationen

Hausaufgabe 1 beginnt damit, Durchschnitte von Mengen zu analysieren, die gegenüber der Anwendung von Regeln **abgeschlossen** sind.

Eine Menge U nennen wir *abgeschlossen* gegenüber 2-Tupelbildung, falls die folgende Implikation $A2$ gilt:

$$(A2) \quad x, y \in U \implies (x, y) \in U.$$

Abgeschlossenheit gegenüber der Ausführung einer Operation ist ein bedeutender Begriff in der theoretischen Informatik, der Maßtheorie (DWT), und auch in der Mathematik insgesamt.

Das Thema nennt sich „**Hüllenbildung**“ bzw. „**Hüllenoperationen**“



Berechenbarkeitsbegriffe beruhen auf **endlichen Regelsystemen**, deren Regeln einzeln effektiv angewendet werden können, um Elemente zu erzeugen bzw. zu benennen.

Insgesamt werden dadurch **induktiv** Mengen dargestellt bzw. erzeugt.

Formal werden die erzeugten Mengen als **Durchschnitt aller Mengen dargestellt**, die in gewissem Sinne abgeschlossen sind gegenüber der Erzeugung von Elementen.



Beispiel 1

Grundlegendes Beispiel ist die Erzeugung von Darstellungen von natürlichen Zahlen, bei der es eine Regel gibt, die es erlaubt, an eine schon erzeugte Zahldarstellung durch **Anfügen eines Striches** die nachfolgende Zahl darzustellen.

Als **Startregel** kann man das Hinschreiben eines einzelnen Striches zur Darstellung der Zahl 1 betrachten.

Die Menge der natürlichen Zahlen wird dann als **kleinste, gegenüber der Regelanwendung abgeschlossene Menge** dargestellt.



Beispiel 2

Erzeugung von Mengen nach HA 1

Sei M eine Menge. Wir definieren

- ① $S_0 := M$ und $S_{i+1} := S_i \cup (S_i \times S_i)$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$,
- ② $M^{\times 2} := \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} S_i$.



Bemerkung

Man nennt $M^{\times 2}$ die gegenüber 2-Tupelbildung abgeschlossene Hülle von M . Sie besitzt zwei Darstellungen:

$$M^{\times 2} = \bigcap_{(U \supseteq M, U \text{ erfüllt A2})} U = \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} S_i. \quad (\text{Def. } S_i \text{ siehe 2a})$$



Es gilt:

$M^{\times 2}$ ist die bezüglich Mengeninklusion kleinste, gegenüber 2-Tupelbildung abgeschlossene Menge U , die M umfasst, d.h., dass $M \subseteq U$ gilt.

Struktur des Beweises:

Zu beweisen ist:

- ① $M \subseteq M^{\times 2}$.
- ② $M^{\times 2}$ ist abgeschlossen gegen der Ausführung der Regel (A1).
- ③ U abgeschlossen und $M \subseteq U \implies M^{\times 2} \subseteq U$.



2.2 Abzählbarkeit

Eine Menge M heißt **abzählbar**, wenn sie entweder endlich ist oder wenn beide M und \mathbb{N} bijektiv aufeinander abgebildet werden können.

Dies ist gleichbedeutend damit, dass eine bijektive Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{N}$ oder eine bijektive Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow M$ existiert.

Eine injektive Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{N}$ heißt **Nummerierung** von M .

Eine surjektive Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow M$ heißt **Auflistung** von M .

Falls M nicht endlich ist, dann gilt:

Es existiert eine bijektive Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow M$

genau dann, wenn

es existiert eine surjektive Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow M$

genau dann, wenn

es existiert eine injektive Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{N}$.

genau dann, wenn

es existiert eine bijektive Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{N}$.

Beweise

1. Auflistung \implies Nummerierung:

Sei $f : \mathbb{N} \rightarrow M$ eine (surjektive) Auflistung von M .

Wir definieren $g : M \rightarrow \mathbb{N}$ durch

$$g(m) = \min f^{-1}(m).$$

Dann ist g eine Nummerierung von M .

2. Nummerierung \implies Auflistung:

Sei $f : M \rightarrow \mathbb{N}$ eine (injektive) Nummerierung von M .

Seien $M_1 := M$ und M_1 sei nicht endlich.

Für alle $i \in \mathbb{N}$ gelte

$$g(i) = f^{-1}(\min f(M_i)) \quad \text{und} \quad M_{i+1} := M_i \setminus \{g(i)\}.$$

Da $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} M_i = \emptyset$, folgt $g : \mathbb{N} \rightarrow M$ surjektiv.
 g ist eine Auflistung von M .

Q.e.d.

3. Hin.Ti's zu HA von Blatt 1

Die Hinweise und Tipps zu Hausaufgaben der THEO-Übungsblätter sind für die Bearbeitung nicht notwendig, möglicherweise aber hilfreich.

Man sollte zunächst versuchen, die Hausaufgaben ohne Hilfestellung zu lösen.

ad HA 1:

Der Mathematiker kennt geordnete Tupel.

Was aber ist ein Wort über einem Alphabet, mengentheoretisch betrachtet?

In dieser Aufgabe zusammen mit der Zusatzaufgabe 1 wird die Beziehung der Tupelstrukturen mit den Wortstrukturen dargestellt.

ad HA 2:

2.1: Die Menge Σ^* ist abzählbar:

Man kann eine Nummerierung $f : \Sigma^* \rightarrow \mathbb{N}$ aus der folgenden Überlegung heraus entwickeln.

Es gelten für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die Gleichungen $|\Sigma^n| = |\Sigma|^{n+1} = 2^{n+1}$.

Aufsummierung ergibt mit Hilfe der geometrischen Formel eine Idee für eine Nummerierung von Σ^* .

4. Vorbereitung TA Blatt 1

Induzieren von Operationen

Sei (A, \circ) eine Algebra.

Dann ist $(\mathcal{P}(A), \circ')$ eine Algebra mit den folgenden Definitionen:

Seien $M, N \subseteq A$.

Dann heißt \circ' die von \circ auf Teilmengen von A induzierte Operation, wobei gilt:

$$M \circ' N := \{m \circ n; m \in M, n \in N\}.$$

Kurzschreibweisen: In bekanntem Kontext werden für $M \circ' N$ meist die Kurzschreibweisen $M \circ N$ oder MN verwendet.

4.1 VA 1

1 Seien $A = \{\epsilon, a, ab\}$ und $B = \{a, ba\}$.
Bestimmen Sie $|A^2|$, $|AB|$ und $|BA|$.

2 Seien $A, B, C, D \subseteq \Sigma^*$ mit $A \subseteq C$ und $B \subseteq D$. Zeigen Sie

$$AB \subseteq CD.$$

Erinnerung: Eine Teilmengenbeziehung $M \subseteq N$ zeigt man, indem man ein $w \in M$ annimmt und dann zeigt, dass $w \in N$ folgt.

- 1 Seien $A = \{\epsilon, a, ab\}$ und $B = \{a, ba\}$.
Bestimmen Sie $|A^2|$, $|AB|$ und $|BA|$.

Lösung

$$|A^2| = |\{\epsilon, a, ab\}\{\epsilon, a, ab\}| = |\{\epsilon, a, ab, a^2, a^2b, aba, abab\}| = 7.$$

$$|AB| = |\{\epsilon, a, ab\}\{a, ba\}| = |\{a, ba, a^2, aba, ab^2a\}| = 5.$$

$$|BA| = |\{a, ba\}\{\epsilon, a, ab\}| = |\{a, a^2, a^2b, ba, ba^2, ba^2b\}| = 6.$$

- 2 Seien $A, B, C, D \subseteq \Sigma^*$ mit $A \subseteq C$ und $B \subseteq D$. Zeigen Sie

$$AB \subseteq CD.$$

Lösung

Sei $w \in AB$.

Dann muss w aus zwei Teilwörtern u, v bestehen, also $w = uv$ mit $u \in A$ und $v \in B$.

Nach Voraussetzung ist dann auch $u \in C$ und $v \in D$.

Somit ist $w = uv \in CD$.

Lösung 1 (i):

Aus $w \in A(B \cap C)$ folgt $w = uv$
für gewisse u, v mit $u \in A$ und $v \in (B \cap C)$.

Damit folgt $uv \in AB$ und $uv \in AC$, d.h. $w \in AB \cap AC$.

Lösung 1 (ii):

Zum Beweis benutzen wir (i) wie folgt.

Sei $B \subseteq C$. Dann folgt

$$AB = A(B \cap C) \subseteq AB \cap AC \subseteq AC.$$

Bemerkung

Umgekehrt kann man zunächst (ii) beweisen und daraus (i) ableiten. D.h., dass (i) und (ii) die gleiche Aussagekraft besitzen und in diesem Sinne äquivalent sind. Beides sind „Monotonieeigenschaften“.

Lösung 1 (i):

Aus $w \in A(B \cap C)$ folgt $w = uv$
für gewisse u, v mit $u \in A$ und $v \in (B \cap C)$.

Damit folgt $uv \in AB$ und $uv \in AC$, d.h. $w \in AB \cap AC$.

Lösung 1 (ii):

Zum Beweis benutzen wir (i) wie folgt.

Sei $B \subseteq C$. Dann folgt

$$AB = A(B \cap C) \subseteq AB \cap AC \subseteq AC.$$

Bemerkung

Umgekehrt kann man zunächst (ii) beweisen und daraus (i) ableiten. D.h., dass (i) und (ii) die gleiche Aussagekraft besitzen und in diesem Sinne äquivalent sind. Beides sind „Monotonieeigenschaften“.



2 $A \subseteq B \implies A^n \subseteq B^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Lösung 2:

Wir nehmen die Prämisse $A \subseteq B$ an und beweisen die Aussage $A^n \subseteq B^n$ durch Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$.

$n = 0$: Es gilt $A^0 = \{\epsilon\} \subseteq \{\epsilon\} = B^0$.

$n \rightarrow n + 1$: Wir nehmen $A^n \subseteq B^n$ als bewiesen an.

Dann gilt $A^{n+1} = \underbrace{AA^n \subseteq BB^n}_{\text{da } A \subseteq B \text{ und } A^n \subseteq B^n} = B^{n+1}$.

Hier haben wir eine Monotoniebeziehung VA 1 oder aus Teilaufgabe 1 von VA 2 verwendet.