Script generated by TTT

Title: Meixner: Zue_DWT (05.07.2013)

Date: Fri Jul 05 16:15:08 CEST 2013

Duration: 89:56 min

Pages: 30

SS 2013

Zentralübung Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie (zur Vorlesung Prof. Esparza)

Dr. Werner Meixner

Fakultät für Informatik
TU München

http://www14.in.tum.de/lehre/2013SS/dwt/uebung/

5. Juli 2013

ZÜ IX

Übersicht:

1. Termine
2. Thema: Nachtrag HA 8.2
3. Tipps zu HA Blatt 11

2. Thema: Nachtrag HA 8.2

Aufgabenstellung

Seien Φ bzw. Θ unabhängige ZV mit Φ gleichverteilt auf $[-\pi, \pi)$ bzw. $[0, 1]$. Dann ist durch

$$G(\Phi, \Theta) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \cos \Phi + y \sin \Phi = \Theta\}$$

eine zufällige Gerade im $\mathbb{R}^2$ beschrieben, wobei Θ den Abstand der Geraden vom Ursprung angibt.

(a) Für ein festes $r \in [0, \infty)$ sei $K_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2 + y^2} = r\}$.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit

$$\Pr[G(\Phi, \Theta) \cap K_r \neq \emptyset] .$$

(b) Für ein festes $\rho \in [0, \pi]$ sei
$L_\rho = \{(\cos\alpha, \sin\alpha) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha \in [-\rho/2, \rho/2)\}$.

Bestimmen Sie wiederum die Wahrscheinlichkeit

$$\Pr[G(\Phi, \Theta) \cap L_\rho \neq \emptyset] .$$

(Hinweis beachten)

Tipps

Wenn Φ und Θ unabhängige Zufallsvariable sind, dann müssen beide Abbildungen auf einer gemeinsamen Ergebnismenge Ω eines Wahrscheinlichkeitsraums $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$ definiert sein, mithin die Funktionalität $\Omega \to \mathbb{R}$ haben.

Für Ω kommt $[-\pi, \pi) \times [0, 1]$ in Frage mit
$\Phi((x, y)) = x$ und $\Theta((x, y)) = y$.

$\Pr$ kann man aufgrund der genannten Unabhängigkeit aus den gegebenen Randdichten von Φ bzw. Θ herleiten.

Das führt zur Gleichverteilung auf der Fläche Ω,
wobei $\Pr[A]$ durch das Flächenverhältnis von A zu Ω gegeben ist.

Lösung (b):

Wir bestimmen die Punktemenge E aller Punkte $(\phi, \vartheta) \in [-\pi, \pi) \times [0, 1]$, so dass $G(\phi, \vartheta) \cap L_\rho) \neq \emptyset$.

E ist symmetrisch zur Θ-Achse : $(\phi, \vartheta) \in E \Longrightarrow (-\phi, \vartheta)$.

Es reicht aus, die Menge $E^+ = E \cap [0, \pi) \times [0, 1]$ zu bestimmen.

Für $\vartheta = 1$ gilt:

$$(\phi, \vartheta) \in E^+ \iff 0 \leq \phi \leq \rho/2 .$$

D.h., dass für $\vartheta = 1$ die Geraden aus $G(\phi, \vartheta)$ mit $0 \leq \phi$ das Kreissegment L_ρ gerade berühren, falls $0 \leq \phi \leq \rho/2$ gilt.

Wir erweitern die Aussage für Geraden mit kleinerem Abstand ϑ, und zwar zunächst für $\cos\frac{\rho}{2} \leq \vartheta \leq 1$ wie folgt:

$$(\phi, \vartheta) \in E^+ \iff 0 \leq \phi \leq \frac{\rho}{2} + \arccos\vartheta .$$

Also ist die obere Begrenzung von ϕ für alle ϑ mit $\cos\frac{\rho}{2} \leq \vartheta \leq 1$ durch die Funktion $r(\vartheta) = \frac{\rho}{2} + \arccos\vartheta$ gegeben

und es gilt für alle ϑ mit $\cos\frac{\rho}{2} \leq \vartheta \leq 1$ die Bestimmung

$$(\phi, \vartheta) \in E^+ \iff 0 \leq \phi \leq r(\vartheta) .$$

Man kann diesen Teil von E^+ als Fläche unterhalb der Funktion $r(\vartheta)$ im Abschnitt $\vartheta \in [\cos\frac{\rho}{2}, 1]$ auffassen.

Die nächste und letzte Erweiterung besteht in der Bestimmung der Menge E^+ im Bereich $0 \le \vartheta \le \cos\frac{\rho}{2}$.

Man sieht, dass eine Gerade mit Abstand $\vartheta < \cos\frac{\rho}{2}$ und Drehwinkel $\phi = 0$ den Sektor L_ρ nicht mehr schneidet.

Man erhält einen Schnitt mit L_ρ bei positiver Drehung α erstmalig für $\alpha = -\frac{\rho}{2} + \arccos\vartheta$.

Für alle ϑ mit $0 \le \vartheta \le \cos\frac{\rho}{2}$ gilt die Bestimmung

$$(\phi,\vartheta) \in E^+ \iff -\frac{\rho}{2} + \arccos\vartheta \le \phi \le \frac{\rho}{2} + \arccos\vartheta\,.$$

Da $\vartheta \in [\cos\frac{\rho}{2}, 1]$ genau dann gilt, wenn $-\frac{\rho}{2} + \arccos\vartheta \le 0$ gilt, können wir vereinfachen und E^+ insgesamt wie folgt charakterisieren:

$$(\phi,\vartheta) \in E^+ \iff \vartheta \in [0,1],\ 0 \le \phi,\ \text{und}$$
$$-\frac{\rho}{2} + \arccos\vartheta \le \phi \le \frac{\rho}{2} + \arccos\vartheta\,.$$

Diese Charakterisierung kann nun bequem zur Berechnung der Fläche von E benutzt werden

Da $\vartheta \in [\cos\frac{\rho}{2}, 1]$ genau dann gilt, wenn $-\frac{\rho}{2} + \arccos\vartheta \le 0$ gilt, können wir vereinfachen und E^+ insgesamt wie folgt charakterisieren:

$$(\phi,\vartheta) \in E^+ \iff \vartheta \in [0,1],\ 0 \le \phi,\ \text{und}$$
$$-\frac{\rho}{2} + \arccos\vartheta \le \phi \le \frac{\rho}{2} + \arccos\vartheta\,.$$

Diese Charakterisierung kann nun bequem zur Berechnung der Fläche von E benutzt werden

Flächenberechnung F_{E^+}:

Beobachtung: Nach dem Prinzip von Cavallieri ist die Fläche im Streifen $\vartheta \in [0,1]$ zwischen den beiden Randkurven $l(\vartheta) = -\frac{\rho}{2} + \arccos\vartheta$ und $r(\vartheta) = \frac{\rho}{2} + \arccos\vartheta$ gleich dem Rechteck mit Seitenlängen ρ und 1.

Allerdings muss die Bedingung $0 \le \phi$ durch Abschneiden des Flächenstückes R für negative ϕ berücksichtigt werden:

$$R = \frac{\rho}{2} - \int_0^{\rho/2} \cos t\,dt = \frac{\rho}{2} - [\sin t]_0^{\rho/2}$$
$$= \frac{\rho}{2} - \sin\frac{\rho}{2}\,.$$

Flächenberechnung F_{E+}:

Beobachtung: Nach dem Prinzip von Cavallieri ist die Fläche im Streifen $\vartheta \in [0,1]$ zwischen den beiden Randkurven $l(\vartheta) = -\frac{\rho}{2} + \arccos\vartheta$ und $r(\vartheta) = \frac{\rho}{2} + \arccos\vartheta$ gleich dem Rechteck mit Seitenlängen ρ und 1.

Allerdings muss nun die Bedingung $0 \le \phi$ durch Abschneiden des Flächenstückes R für negative ϕ berücksichtigt werden:

$$\begin{aligned} R &= \frac{\rho}{2} - \int_0^{\rho/2} \cos t \, dt = \frac{\rho}{2} - [\sin t]_0^{\rho/2} \\ &= \frac{\rho}{2} - \sin\frac{\rho}{2}\,. \end{aligned}$$

Ergebnis:

$$\begin{aligned} F_{E+} &= \rho - R \\ &= \frac{\rho}{2} + \sin\frac{\rho}{2}\,, \\ F_E &= 2 \cdot F_{E+} \\ &= \rho + 2\sin\frac{\rho}{2}\,. \end{aligned}$$

Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit gilt:

$$\begin{aligned} \Pr[(\Phi,\Theta) \in E] &= \Pr[G(\Phi,\Theta) \cap L_\rho \neq \emptyset] \\ &= \frac{F_E}{2\pi} \\ &= \frac{\rho + 2\sin\frac{\rho}{2}}{2\pi}\,. \end{aligned}$$

3.1 Tipps zu HA 11.1

Aufgabenstellung (verkürzt):

Gegeben sei eine Zufallsvariable 'Notenverteilung' N mit diskreten Werten $W_N = \{1,2,3,4,5\}$.

Annahme für Wahrscheinlichkeiten $\Pr[N = i] = p_i$:
$p_1 = 0.05$, $p_2 = 0.05$, $p_3 = 0.2$, $p_4 = 0.4$ und $p_5 = 0.3$.

Zur Prüfung der Hypothese $H_0 : \Pr[N = i] = p_i\ \forall i$,
dass nämlich die angenommenen Wahrscheinlichkeiten alle zutreffen,
wird ein χ^2-Anpassungstest zum Signifikanzniveau 0.1 verwendet.

3.1 Tipps zu HA 11.1

Aufgabenstellung (verkürzt):

Gegeben sei eine Zufallsvariable 'Notenverteilung' N mit diskreten Werten $W_N = \{1,2,3,4,5\}$.

Annahme für Wahrscheinlichkeiten $\Pr[N = i] = p_i$:
$p_1 = 0.05$, $p_2 = 0.05$, $p_3 = 0.2$, $p_4 = 0.4$ und $p_5 = 0.3$.

Zur Prüfung der Hypothese $H_0 : \Pr[N = i] = p_i\ \forall i$,
dass nämlich die angenommenen Wahrscheinlichkeiten alle zutreffen,
wird ein χ^2-Anpassungstest zum Signifikanzniveau 0.1 verwendet.

1. Kann die folgende Häufigkeitsverteilung der Notenvergabe bei $n = 120$ Klausuren abgelehnt werden?

$$h_5 = 41, \quad h_4 = 51, \quad h_3 = 20, \quad h_2 = 5, \quad h_1 = 4\,.$$

2. Für welchen maximalen Wert von $r \geq 0$ kann die folgende Häufigkeitsverteilung noch akzeptiert werden:

$$h'_5 = 41 + r, \quad h'_4 = 51, \quad h'_3 = 20 - r, \quad h'_2 = 5, \quad h'_1 = 4\,.$$

Tipps dazu:

Im χ^2-Anpassungstest werden die Häufigkeiten h_i von k Werten mit den a priori geforderten Wahrscheinlichkeiten p_i verglichen und dann entschieden, ob die gemessenen Häufigkeiten im Rahmen der geforderten p_i als unwahrscheinlich bewertet und deshalb abgelehnt werden müssen.

Die Abweichung wird durch die folgende Zufallsvariable gemessen.

$$T = \sum_{i=1}^{k} \frac{(h_i - np_i)^2}{np_i}\,.$$

(a) Falls $T > 7,78$ gilt, dann müsste die Fakultät mahnen. Verifizieren Sie diese Aussage.
Den Wert von $\chi^2_{4,0.9}$ finden Sie auch in der Tabelle C im Anhang des Buches Schickinger/Steger.
(siehe Tafel)

(b) Falls ein h_i von r linear abhängt, dann ist T ein quadratisches Polynom in r. Die zu lösende Ungleichung erfordert die Bestimmung einer Nullstelle eines quadratischen Polynoms.
(siehe Tafel)

Tipps dazu:

Im χ^2-Anpassungstest werden die Häufigkeiten h_i von k Werten mit den a priori geforderten Wahrscheinlichkeiten p_i verglichen und dann entschieden, ob die gemessenen Häufigkeiten im Rahmen der geforderten p_i als unwahrscheinlich bewertet und deshalb abgelehnt werden müssen.

Die Abweichung wird durch die folgende Zufallsvariable gemessen.

$$T = \sum_{i=1}^{k} \frac{(h_i - np_i)^2}{np_i}\,.$$

(a) Falls $T > 7,78$ gilt, dann müsste die Fakultät mahnen.
Verifizieren Sie diese Aussage.
Den Wert von $\chi^2_{4,0.9}$ finden Sie auch in der Tabelle C im Anhang des Buches Schickinger/Steger.
(siehe Tafel)

(b) Falls ein h_i von r linear abhängt, dann ist T ein quadratisches Polynom in r. Die zu lösende Ungleichung erfordert die Bestimmung einer Nullstelle eines quadratischen Polynoms.
(siehe Tafel)

(a) Falls $T > 7,78$ gilt, dann müsste die Fakultät mahnen.
Verifizieren Sie diese Aussage.
Den Wert von $\chi^2_{4,0.9}$ finden Sie auch in der Tabelle C im Anhang des Buches Schickinger/Steger.
(siehe Tafel)

(b) Falls ein h_i von r linear abhängt, dann ist T ein quadratisches Polynom in r. Die zu lösende Ungleichung erfordert die Bestimmung einer Nullstelle eines quadratischen Polynoms.
(siehe Tafel)

3.2 Tipps zu HA 11.2

Aufgabenstellung (verkürzt):

Gegeben: Umfrage zu Konsum eines Produkts.

Jeder Befragte hält sich an das folgende Protokoll:

- Falls er ein Konsument des Produkts ist, so antwortet er mit ,,Ja".
- Andernfalls wirft er eine faire Münze. Zeigt die Münze ,,Kopf", antwortet er mit ,,Ja", andernfalls mit ,,Nein".

Annahmen: p ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Befragte ein Konsument des Produkts ist.

Aufgabe: Es ist durch Auswertung der Umfrage festzustellen, ob $p = 0$ angenommen werden darf.

Konstruktion eines Tests:

- Annahmen
- Testgröße
- Nullhypothese
- Ablehnungsbereich

...

Daten:

- Teilnehmer: 237
- Ja: 124
- Nein: 113

Tipps dazu:

Die Anzahl der Nein definiert eine Zufallsvariable T mit Binomialverteilung $\mathrm{Bin}(237, p')$.

Man bestimme zunächst p' in Abhängigkeit von p.

Nun bestimme man für $p = 0$ ein möglichst großes Intervall $[0, k]$, so dass $\Pr[T \leq k] \leq 0.1$ gilt und verwende k als Ablehnungskriterium.

Man kann auch alternativ mit der Anzahl der Ja im Schema der Tests mit Hypothesen arbeiten.

Für die Konstruktion von Tests gibt es immer mehrere Möglichkeiten!

Möglichkeit: H_0: $p' \geq \frac{1}{2}$ mit H_1: $p' < \frac{1}{2}$.

Konstruktion Ablehnungsbereich:

$$\begin{aligned}\Pr[T \leq k] &= \Pr\left[\frac{T - n \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{n \cdot \frac{1}{4}}} \leq \frac{k - n \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{n \cdot \frac{1}{4}}}\right] \leq 0.1 \\ &\approx \Phi\left(\frac{k - n \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{n \cdot \frac{1}{4}}}\right).\end{aligned}$$

Quantil: $z_{0.1} = -1.28\ldots$.

$k = ?$ (usw. siehe Tafel)

3.3 Tipps zu HA 11.3

Aufgabenstellung (verkürzt):

(a) Bestimmen Sie den ML-Schätzer $\widehat{\lambda}$ für den Parameter $\lambda > 0$ einer $\Gamma(\lambda, 3)$-Verteilung. Wie hängt $\widehat{\lambda}$ mit dem Stichprobenmittel $\overline{X}$ zusammen?

(b) Sei $n > 3$.
Ist $\widehat{\lambda}$ erwartungstreu bzgl. λ?
Ist $\widehat{\lambda}$ konsistent im quadratischen Mittel bzgl. λ?

Tipps dazu:

Betrachten Sie n unabhängige und $\Gamma(\lambda, 3)$-verteilte Stichprobenvariable X_i. Für die Wahrscheinlichkeitsdichte einer Stichprobe $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ gilt $L(\lambda; \vec{x}) = \prod_{i \in [n]} f_{X_i}(x_i)$.

(a) Nun bestimmt man für festes $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ den Parameterwert $\widehat{\lambda}$, so dass $L(\widehat{\lambda}; \vec{x})$ das Maximum aller $L(\lambda; \vec{x})$ ist.

Dazu faktorisiert man die Ableitung $\frac{d}{d\lambda} L(\lambda; \vec{x})$ und setzt einen der Faktoren gleich Null.

Man erhält $\widehat{\lambda}$ als Funktion von $\overline{X}$. $\widehat{\lambda}$ ist eine Zufallsvariable über dem gemeinsamen W'keitsraum der X_i.

Beachten Sie, dass die W'keitsverteilung von $\overline{X}$ leicht bestimmt werden kann!

Vermutung: $\widehat{\lambda} = 3/\overline{X}$? (siehe Tafel)

(b) Um $\mathbb{E}[\widehat{\lambda}] = \lambda$ überprüfen zu können, muss man zunächst die Dichtefunktion für $\widehat{\lambda}$ durch Ableitung der Verteilungsfunktion $F_{\widehat{\lambda}}(t) = \Pr[\widehat{\lambda} \le t]$ berechnen.

Informieren Sie sich über die Ableitung von bestimmten Integralen nach einem Parameter t, der nur in einer Integrationsgrenze enthalten ist.

(siehe Tafel)

(b) Um $\mathbb{E}[\widehat{\lambda}] = \lambda$ überprüfen zu können, muss man zunächst die Dichtefunktion für $\widehat{\lambda}$ durch Ableitung der Verteilungsfunktion $F_{\widehat{\lambda}}(t) = \Pr[\widehat{\lambda} \le t]$ berechnen.

Informieren Sie sich über die Ableitung von bestimmten Integralen nach einem Parameter t, der nur in einer Integrationsgrenze enthalten ist.

(siehe Tafel)

(b) Um $\mathbb{E}[\widehat{\lambda}] = \lambda$ überprüfen zu können, muss man zunächst die Dichtefunktion für $\widehat{\lambda}$ durch Ableitung der Verteilungsfunktion $F_{\widehat{\lambda}}(t) = \Pr[\widehat{\lambda} \le t]$ berechnen.

Informieren Sie sich über die Ableitung von bestimmten Integralen nach einem Parameter t, der nur in einer Integrationsgrenze enthalten ist.

(siehe Tafel)