Script generated by TTT

Title: Meixner: Zue_DWT (28.06.2013)

Date: Fri Jun 28 16:14:13 CEST 2013

Duration: 110:09 min

Pages: 40

SS 2013

Zentralübung Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie (zur Vorlesung Prof. Esparza)

Dr. Werner Meixner

Fakultät für Informatik
TU München

http://www14.in.tum.de/lehre/2013SS/dwt/uebung/

28. Juni 2013

ZÜ VIII

Übersicht:

1. Tipps zu HA Blatt 10
2. Thema: Wiederholung HA 8.2

1. Tipps zu HA Blatt 10

Die folgenden Hinweise und Tipps zu Hausaufgaben sind für die Bearbeitung nicht notwendig, möglicherweise aber hilfreich. Man sollte zunächst versuchen, die Hausaufgaben ohne Hilfestellung zu lösen.

1.1 Tipps zu HA 10.1

Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ mit einer geeigneten Induktion die Verteilungsfunktion einer $\Gamma(\lambda, n)$-verteilten ZV.

Bemerkung: Gesucht ist ein integralfreier Ausdruck für die Verteilungsfunktion.

Tipps dazu:

Die Verteilung der Summe S_n von n unabhängigen, mit Parameter λ exponentialverteilten ZV $X_1, X_2, \ldots, X_n$ heißt Erlang-Verteilung.

Sie besitzt für $x > 0$ die angegebene Dichte

$$f_{S_n}(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x} .$$

Man berechnet die Dichte durch wiederholte Faltung.

Tipps dazu:

Die Verteilung der Summe S_n von n unabhängigen, mit Parameter λ exponentialverteilten ZV $X_1, X_2, \ldots, X_n$ heißt Erlang-Verteilung.

Sie besitzt für $x > 0$ die angegebene Dichte

$$f_{S_n}(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x} .$$

Man berechnet die Dichte durch wiederholte Faltung.

Die Verteilungsfunktion

$$F_{S_n}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_{X_n}(t)\, dt$$

berechnet man durch partielle Integration.

Dabei tritt eine Rekursionsformel

$$F_{S_n}(x) = A + F_{S_{n-1}}(x)$$

auf.

Den gesuchten Ausdruck erhält man dann durch Aufsummieren.

ue08.pdf - Adobe Acrobat Professional

File Edit View Document Comments Forms Tools Advanced Window Help

9 / 52 154% Find

Die Verteilungsfunktion

$$F_{S_n}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_{X_n}(t)\,dt$$

berechnet man durch partielle Integration.

Dabei tritt eine Rekursionsformel

$$F_{S_n}(x) = A + F_{S_{n-1}}(x)$$

auf.

Den gesuchten Ausdruck erhält man dann durch Aufsummieren.

Die Verteilungsfunktion

$$F_{S_n}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_{\cancel{X}_n}(t)\,dt \qquad /S$$

berechnet man durch partielle Integration.

Dabei tritt eine Rekursionsformel

$$F_{S_n}(x) = A + F_{S_{n-1}}(x)$$

auf.

Den gesuchten Ausdruck erhält man dann durch Aufsummieren.

Tipps dazu:

Die Verteilung der Summe S_n von n unabhängigen, mit Parameter λ exponentialverteilten ZV $X_1, X_2, \ldots, X_n$ heißt Erlang-Verteilung.

Sie besitzt für $x > 0$ die angegebene Dichte

$$f_{S_n}(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x}\,.$$

Man berechnet die Dichte durch wiederholte Faltung.

Die Verteilungsfunktion

$$F_{S_n}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_{\cancel{X}_n}(t)\,dt \qquad /S$$

berechnet man durch partielle Integration.

Dabei tritt eine Rekursionsformel

$$F_{S_n}(x) = A + F_{S_{n-1}}(x)$$

auf.

Den gesuchten Ausdruck erhält man dann durch Aufsummieren.

ue08.pdf - Adobe Acrobat Professional

File Edit View Document Comments Forms Tools Advanced Window Help

11 / 52 154% Find

Die Verteilungsfunktion

$$F_{S_n}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_{X_n}(t)\, dt$$

berechnet man durch partielle Integration.

Dabei tritt eine Rekursionsformel

$$F_{S_n}(x) = A + F_{S_{n-1}}(x)$$

auf.

Den gesuchten Ausdruck erhält man dann durch Aufsummieren.

Die Verteilungsfunktion

$$F_{S_n}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_{\cancel{X}_n}(t)\, dt \qquad I\ S$$

berechnet man durch partielle Integration.

Dabei tritt eine Rekursionsformel

$$F_{S_n}(x) = A + F_{S_{n-1}}(x)$$

auf.

Den gesuchten Ausdruck erhält man dann durch Aufsummieren.

(siehe Tafel)

Microsoft Windows xp Tablet PC Edition

(siehe Tafel)

1.2 Tipps zu HA 10.2

Aufgabenstellung (verkürzt):

Seien $T_1, T_2, \ldots, T_n$ unabhängige, $\exp(\lambda)$-verteilteZufallsvariablen, die beispielsweise die Lebenszeit eines radioaktiven Atoms beschreiben. $T_{(k)}$ sei der Zeitpunkt, an dem erstmalig k Atome zerfallen sind. Dann ist $T_{(k)}$ eine Zufallsvariable mit der Dichte

$$f_{(k)}(t) = k \cdot \binom{n}{k} \cdot F(t)^{k-1} \cdot (1 - F(t))^{n-k} \cdot f(t)$$

mit $F(t) = (1 - e^{-\lambda t}) \cdot I_{(0,\infty)}(t)$ und $f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \cdot I_{(0,\infty)}(t)$.

Andererseits gilt $T_{(k)} = \Delta_0 + \Delta_1 + \ldots + \Delta_{k-1}$ (*)
mit unabhängigen ZV $\Delta_i \sim \exp((n-i)\lambda)$.

(a) Überprüfen Sie die Behauptung (*) für $T_{(2)}$ und $T_{(3)}$ mit Hilfe von momenterzeugenden Funktionen.
D.h., bestimmen Sie die momenterzeugende Funktion von $T_{(k)}$ mittels der oben angegebenen Dichte und überprüfen Sie dann, dass diese mit der momenterzeugenden Funktion von $\Delta_0 + \Delta_1 + \ldots + \Delta_{k-1}$ übereinstimmt.

(b) Bestimmen Sie $\mathbb{E}[T_{(k)}]$ und $\mathrm{Var}[T_{(k)}]$ unter Verwendung von (*).

1.2 Tipps zu HA 10.2

Aufgabenstellung (verkürzt):

Seien $T_1, T_2, \ldots, T_n$ unabhängige, $\exp(\lambda)$-verteilteZufallsvariablen, die beispielsweise die Lebenszeit eines radioaktiven Atoms beschreiben. $T_{(k)}$ sei der Zeitpunkt, an dem erstmalig k Atome zerfallen sind. Dann ist $T_{(k)}$ eine Zufallsvariable mit der Dichte

$$f_{(k)}(t) = k \cdot \binom{n}{k} \cdot F(t)^{k-1} \cdot (1 - F(t))^{n-k} \cdot f(t)$$

mit $F(t) = (1 - e^{-\lambda t}) \cdot I_{(0,\infty)}(t)$ und $f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \cdot I_{(0,\infty)}(t)$.

Andererseits gilt $T_{(k)} = \Delta_0 + \Delta_1 + \ldots + \Delta_{k-1}$ (*)
mit unabhängigen ZV $\Delta_i \sim \exp((n-i)\lambda)$.

(a) Überprüfen Sie die Behauptung (*) für $T_{(2)}$ und $T_{(3)}$ mit Hilfe von momenterzeugenden Funktionen.
D.h., bestimmen Sie die momenterzeugende Funktion von $T_{(k)}$ mittels der oben angegebenen Dichte und überprüfen Sie dann, dass diese mit der momenterzeugenden Funktion von $\Delta_0 + \Delta_1 + \ldots + \Delta_{k-1}$ übereinstimmt.

(b) Bestimmen Sie $\mathbb{E}[T_{(k)}]$ und $\mathrm{Var}[T_{(k)}]$ unter Verwendung von (*).

Tipps:

Für unabhängige ZV X_1, X_2 gilt im Allgemeinen keineswegs, dass die ZV X_1, Y mit $Y = X_2 - X_1$ unabhängig sind. Allerdings gilt in dem speziellen Fall der $T_{(1)}, T_{(2)}, \ldots$ tatsächlich, dass $T_{(1)}, \Delta_1$ mit $\Delta_1 = T_{(2)} - T_{(1)}$ unabhängige ZV sind. Insgesamt ist sogar die Menge der ZV Δ_i unabhängig.

(a) Hier ein einfaches Beispiel zur Berechnung von momenterzeugenden Funktionen: Sei X eine mit Parameter λ exponentialverteilte ZV. Dann gilt für die momenterzeugende Funktion $M_X(z)$ und $0 \le z < \lambda$

$$M_X(z) = \mathbb{E}[e^{Xz}] = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t) \cdot e^{tz}\, dt = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \cdot e^{tz}\, dt = \frac{\lambda}{\lambda - z}.$$

Man beachte, dass die momenterzeugende Funktion einer Summe von unabhängigen Zufallsvariablen X_i gleich dem Produkt der momenterzeugenden Funktionen $M_{X_i}(z)$ ist. Man kann also leicht aus den momenterzeugenden Funktionen M_{Δ_i} die Funktion $M_{T_{(k)}}(z)$ errechnen.

Etwas aufwendiger ist die Berechnung der $M_{T_{(k)}}(z)$ durch Verwendung der angegebenen Dichtefunktion $f_{T_{(k)}}(x)$ und der entsprechenden Integration $M_{T_{(k)}}(z) = \mathbb{E}[e^{T_{(k)} \cdot z}]$.

Aber auch in diesem Fall ist lediglich die e-Funktion mit unterschiedlichen Parametern zu integrieren.
Zudem kennt man das Ergebnis im Voraus und man benötigt nur die Fälle $k = 2$ und $k = 3$.

(a) Hier ein einfaches Beispiel zur Berechnung von momenterzeugenden Funktionen: Sei X eine mit Parameter λ exponentialverteilte ZV. Dann gilt für die momenterzeugende Funktion $M_X(z)$ und $0 \leq z < \lambda$

$$M_X(z) = \mathbb{E}[e^{Xz}] = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t) \cdot e^{tz}\, dt = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \cdot e^{tz}\, dt = \frac{\lambda}{\lambda - z}\,.$$

(b) Nun macht man sich die Darstellung von $T_{(k)}$ als Summe der unabhängigen ZV Δ_i zu Nutze, um sich die Berechnung von Erwartungswert und Varianz zu erleichtern.

1.3 Tipps zu HA 10.3

Aufgabenstellung (verkürzt):

Die Lebensdauer (in Betriebsstunden gemessen) von (50) Glühbirnen sei $\exp(10^{-3})$-verteilt und unabhängig.

Sei N_t die Anzahl an defekten Glühbirnen innerhalb von t Betriebsstunden. Nach Vorlesung ist N_t Poisson-verteilt ($f_{N_t}(i) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}$ mit $\lambda = 10^{-3}t$).

(a) Wie viele Glühbirnen müssen im Mittel über einen Zeitraum von 5500 Betriebsstunden auf Grund eines Defekts ausgetauscht werden?

1.3 Tipps zu HA 10.3

Aufgabenstellung (verkürzt):

Die Lebensdauer (in Betriebsstunden gemessen) von (50) Glühbirnen sei $\exp(10^{-3})$-verteilt und unabhängig.

Sei N_t die Anzahl an defekten Glühbirnen innerhalb von t Betriebsstunden. Nach Vorlesung ist N_t Poisson-verteilt ($f_{N_t}(i) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}$ mit $\lambda = 10^{-3}t$).

(a) Wie viele Glühbirnen müssen im Mittel über einen Zeitraum von 5500 Betriebsstunden auf Grund eines Defekts ausgetauscht werden?

(b) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass innerhalb von 5500 Betriebsstunden mehr als 10 Birnen ausgetauscht werden müssen?
   (i) Bestimmen Sie die gesuchte W'keit von Hand.
   (ii) Approximieren Sie die gesuchte W'keit mit der Formel in der Angabe.
   (iii) Approximieren Sie nur zum Vergleich die Poisson-Verteilung durch eine $\mathrm{Bin}(1000, p)$-Verteilung für geeignetes p.
      i. Verwenden Sie dann die Chernoff-Ungleichung, um die gesuchte W'keit zu approximieren.
      ii. Verwenden Sie den ZGWS, um die gesuchte W'keit zu approximieren.

(c) Die Übungsleitung ist daran interessiert, den spätesten Zeitpunkt t_0 (in Betriebsstunden) zu ermitteln, für den noch $\Pr[N_{t_0} < 50] \geq 0.99$ gilt.
   (i) Ermitteln Sie eine erste grobe Schätzung für t_0, indem Sie t_0 so wählen dass die erwartete Anzahl an defekten Birnen gerade 50 beträgt.
   (ii) Verwenden Sie nun die Approximation aus (b-ii) unter Verwendung eines CAS, um diese Frage zu beantworten.

Tipps:

Zunächst ordnet man der i-ten Glühbirne eine exponentialverteilte ZV T_i zu.

Diese Birnen brennen aber nicht gleichzeitig sondern erst bei Einsetzen in die Lampe.

Also ergibt sich die Anzahl N_t der nacheinander in t Betriebsstunden defekt gewordenen Birnen als Poisson-verteilte ZV mit Parameter $\lambda = 10^{-3}t$.

(a) Es ist nach dem Erwartungswert von N_t gefragt.
(b) (i) Berechnen Sie zunächst $\Pr[N_{5500} \leq 10]$.
   (iii) Wählen Sie $p = 0.0055$. Überprüfen Sie die Anwendbarkeit des ZGWS mittels Erwartungswert und Varianz der vorgeschlagenen Binomialverteilung.
(c) Für welches t ist der Erwartungswert gerade 50?

(Siehe Tafel)

(a) Es ist nach dem Erwartungswert von N_t gefragt.

(b) (i) Berechnen Sie zunächst $\Pr[N_{5500} \leq 10]$.

(iii) Wählen Sie $p = 0.0055$. Überprüfen Sie die Anwendbarkeit des ZGWS mittels Erwartungswert und Varianz der vorgeschlagenen Binomialverteilung.

(c) Für welches t ist der Erwartungswert gerade 50?

(Siehe Tafel)

2. Thema: Wiederholung HA 8.2

Aufgabenstellung

Seien Φ bzw. Θ unabhängige ZV mit Φ gleichverteilt auf $[-\pi, \pi)$ bzw. $[0, 1]$. Dann ist durch

$$G(\Phi, \Theta) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \cos \Phi + y \sin \Phi = \Theta\}$$

eine zufällige Gerade im $\mathbb{R}^2$ beschrieben, wobei Θ den Abstand der Geraden vom Ursprung angibt.

(a) Für ein festes $r \in [0, \infty)$ sei $K_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2 + y^2} = r\}$.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit

$$\Pr[G(\Phi, \Theta) \cap K_r \neq \emptyset].$$

(a) Man bestimme zunächst die Menge
$A = \{(\phi, \vartheta) \mid G(\phi, \vartheta) \cap K_r \neq \emptyset\}$.

(siehe Zeichnungen an der Tafel!)

In welcher Beziehung steht die Fläche von A zu der gesuchten Wahrscheinlichkeit?

(b) Der prinzipielle Zugang zur Lösung ist gleich wie in (a).

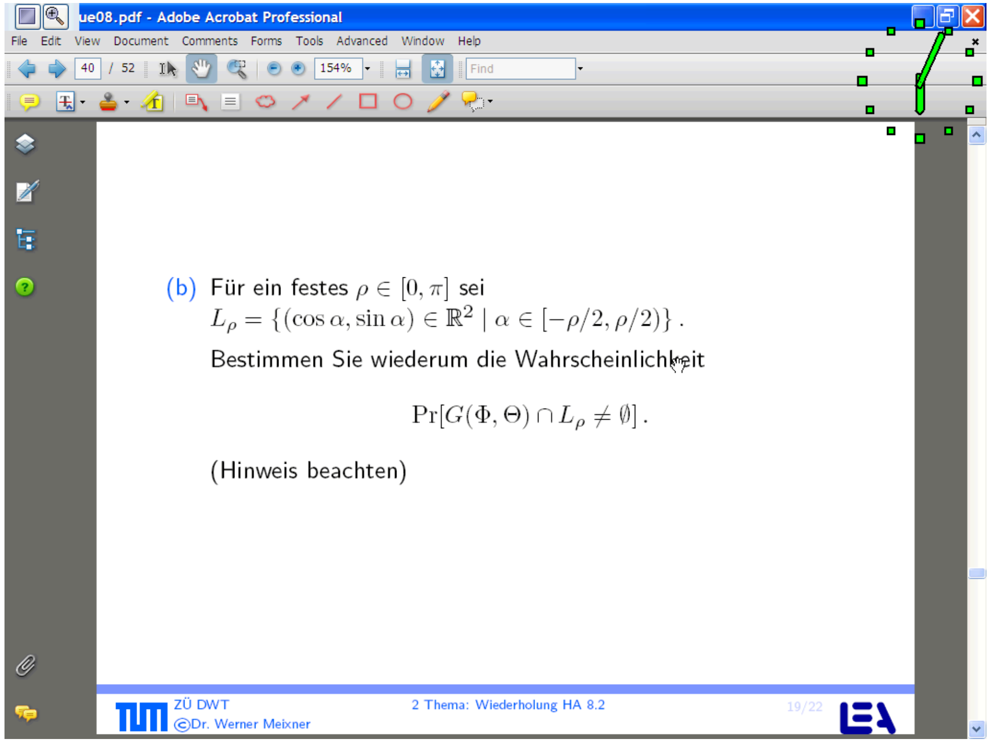
(siehe Zeichnungen an der Tafel!)

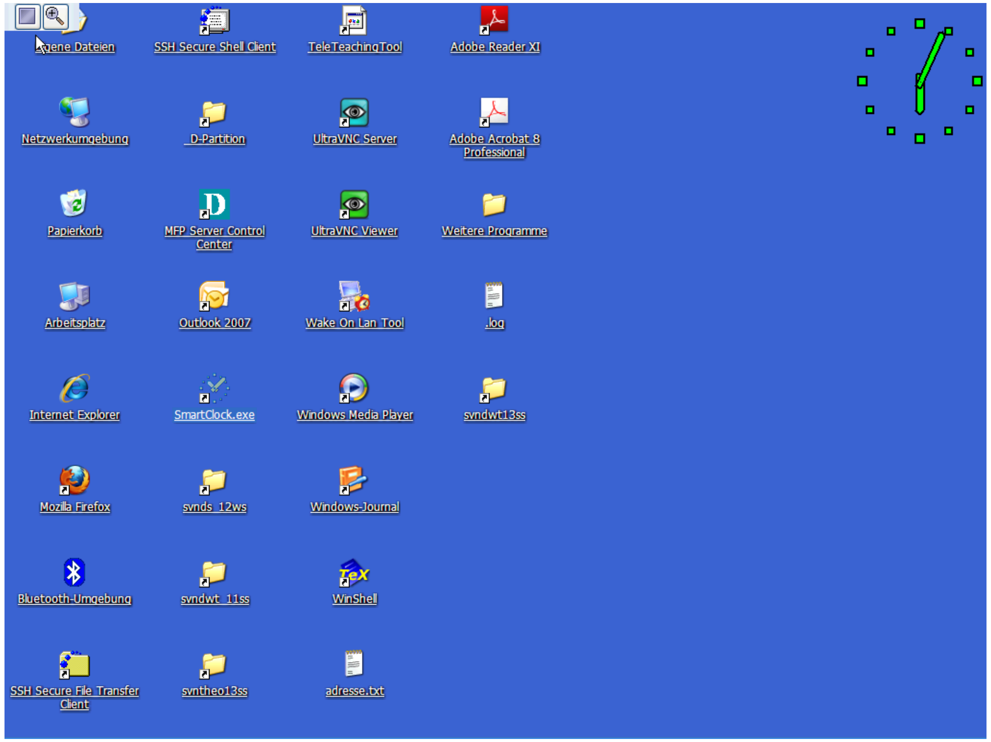
(b) Für ein festes $\rho \in [0, \pi]$ sei
$L_\rho = \{(\cos\alpha, \sin\alpha) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha \in [-\rho/2, \rho/2)\}$.

Bestimmen Sie wiederum die Wahrscheinlichkeit

$$\Pr[G(\Phi, \Theta) \cap L_\rho \neq \emptyset].$$

(Hinweis beachten)




gene Dateien
Netzwerkumgebung
Papierkorb
Arbeitsplatz
Internet Explorer
Mozilla Firefox
Bluetooth-Umgebung
SSH Secure File Transfer Client
SSH Secure Shell Client
D-Partition
MFP Server Control Center
Outlook 2007
SmartClock.exe
synds_12ws
syndwt_11ss
syntheo13ss
TeleTeachingTool
UltraVNC Server
UltraVNC Viewer
Wake On Lan Tool
Windows Media Player
Windows-Journal
WinShell
adresse.txt
Adobe Reader XI
Adobe Acrobat 8 Professional
Weitere Programme
.log
syndwt13ss