

Script generated by TTT

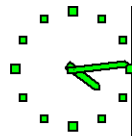
Title: Meixner: Zue\_DWT (10.05.2013)

Date: Fri May 10 16:14:56 CEST 2013

Duration: 92:37 min

Pages: 41

SS 2013



# Zentralübung

## Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie (zur Vorlesung Prof. Esparza)

Dr. Werner Meixner

Fakultät für Informatik  
TU München

<http://www14.in.tum.de/lehre/2013SS/dwt/uebung/>

10. Mai 2013

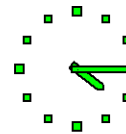
## ZÜ IV

### Übersicht:

1. Thema: Markov-Ketten:

- Übergangszeit
- Erwartete Übergangszeit
- Erwartete Rückkehrzeit
- Ankunftswahrscheinlichkeit
- Rückkehrwahrscheinlichkeit

2. Vorbereitung auf HA Blatt 4:



The screenshot shows a PDF viewer window titled "ue04.pdf - Adobe Acrobat Professional". The content of the PDF is as follows:

**TUM ZÜ DWT**  
©Dr. Werner Meixner

**LEA**

**1. Thema: Markov-Ketten**

**Vorbemerkungen:**

Markov-Ketten sind Thema in den TA 3.1 und TA 4.2, und insbesondere in der HA 4.1.

Man beachte, dass diskrete zeithomogene Markov-Ketten in der Regel durch Markov-Diagramme definiert werden.

In den Diagrammen werden nur positive Übergangswahrscheinlichkeiten eingetragen.

Alle übrigen Übergänge haben die Wahrscheinlichkeit 0.

**TUM ZÜ DWT**  
©Dr. Werner Meixner

1/25

2/25

ue04.pdf - Adobe Acrobat Professional

6 / 95 159%

Find

Beispiel 1: Markov-Diagramme als endliche Automaten

Mit  $Q = \Sigma$  entsprechen die akzeptierten Wörter in diesem Automat genau den Pfaden im folgenden Markov-Diagramm vom Zustand 0 in den Zustand 3.

TUM ZÜ DWT ©Dr. Werner Meixner 3/25 LEA

ue04.pdf - Adobe Acrobat Professional

10 / 95 159%

Find

Zentrale Begriffe:

Folge von Zufallsvariablen  $(X_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$  heißt eine **Markov-Kette mit diskreter Zeit**, wenn die „**Markov-Bedingung**“ erfüllt ist.

Im zeithomogenen Fall bedeutet dies in etwa, dass die Markov-Kette mit einem Markov-Diagramm definiert werden kann, so dass also die Übergangswahrscheinlichkeiten lediglich von den momentanen Zuständen abhängen.

Der Zustandsraum sei  $S$ .

TUM ZÜ DWT ©Dr. Werner Meixner 1 Thema: Markov-Ketten 4/25 LEA

ue04.pdf - Adobe Acrobat Professional

10 / 95 159%

Find

Beispiel 1: Markov-Diagramme als endliche Automaten

Mit  $Q = \Sigma$  entsprechen die akzeptierten Wörter in diesem Automat genau den Pfaden im folgenden Markov-Diagramm vom Zustand 0 in den Zustand 3.

TUM ZÜ DWT ©Dr. Werner Meixner 1 Thema: Markov-Ketten 3/25 LEA

ue04.pdf - Adobe Acrobat Professional

10 / 95 159%

Find

Zentrale Begriffe:

Folge von Zufallsvariablen  $(X_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$  heißt eine **Markov-Kette mit diskreter Zeit**, wenn die „**Markov-Bedingung**“ erfüllt ist.

Im zeithomogenen Fall bedeutet dies in etwa, dass die Markov-Kette mit einem Markov-Diagramm definiert werden kann, so dass also die Übergangswahrscheinlichkeiten lediglich von den momentanen Zuständen abhängen.

Der Zustandsraum sei  $S$ .

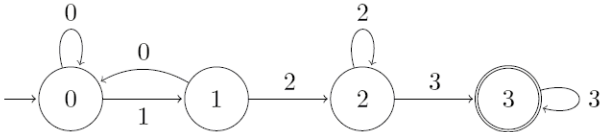
TUM ZÜ DWT ©Dr. Werner Meixner 1 Thema: Markov-Ketten 4/25 LEA

ue04.pdf - Adobe Acrobat Professional

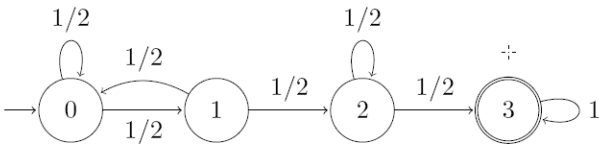
10 / 95 159%

Find

**Beispiel 1: Markov-Diagramme als endliche Automaten**



Mit  $Q = \Sigma$  entsprechen die akzeptierten Wörter in diesem Automat genau den Pfaden im folgenden Markov-Diagramm vom Zustand 0 in den Zustand 3.



TUM ZÜ DWT ©Dr. Werner Meixner 1 Thema: Markov-Ketten 3/25 LEA

ue04.pdf - Adobe Acrobat Professional

10 / 95 159%

Find

**Zentrale Begriffe:**

Folge von Zufallsvariablen  $(X_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$  heißt eine **Markov-Kette mit diskreter Zeit**, wenn die „**Markov-Bedingung**“ erfüllt ist.

Im zeithomogenen Fall bedeutet dies in etwa, dass die Markov-Kette mit einem Markov-Diagramm definiert werden kann, so dass also die Übergangswahrscheinlichkeiten lediglich von den momentanen Zuständen abhängen.

Der Zustandsraum sei  $S$ .

TUM ZÜ DWT ©Dr. Werner Meixner 1 Thema: Markov-Ketten 4/25 LEA

ue04.pdf - Adobe Acrobat Professional

10 / 95 159%

Find

**Beispiel 2:**

Zufallsvariable  $(Z_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$  der TA 3.1.

Die Verteilungsdichte  $f_{Z_i}$  einer Zufallsvariablen  $Z_i$  wird aus  $Z_0$  errechnet durch **Matrixmultiplikation**

$$f_{Z_i} = f_{Z_0} \cdot P^i$$

wobei  $P$  die Übergangsmatrix des definierenden Markov-Diagramms sei.

$f_{Z_i}$  wird hier als Zeilenvektor von Wahrscheinlichkeiten für die Annahme der einzelnen Zustände aufgefasst.

Zusätzlich muss die Anfangsverteilung für  $Z_0$  gegeben sein.

TUM ZÜ DWT ©Dr. Werner Meixner 5/25 LEA

ue04.pdf - Adobe Acrobat Professional

16 / 95 159%

Find

Für Beispiel 1:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

TUM ZÜ DWT ©Dr. Werner Meixner 1 Thema: Markov-Ketten 6/25 LEA

ue04.pdf - Adobe Acrobat Professional

15 / 95 159%

Find

**Beispiel 2:**

Zufallsvariable  $(Z_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$  der TA 3.1.

Die Verteilungsdichte  $f_{Z_i}$  einer Zufallsvariablen  $Z_i$  wird aus  $Z_0$  errechnet durch Matrixmultiplikation

$$f_{Z_i} = f_{Z_0} \cdot P^i.$$

wobei  $P$  die Übergangsmatrix des definierenden Markov-Diagramms sei.

$f_{Z_i}$  wird hier als Zeilenvektor von Wahrscheinlichkeiten für die Annahme der einzelnen Zustände aufgefasst.  $\ddagger$

Zusätzlich muss die Anfangsverteilung für  $Z_0$  gegeben sein.

TUM ZÜ DWT ©Dr. Werner Meixner 1 Thema: Markov-Ketten 5/25 LEA

ue04.pdf - Adobe Acrobat Professional

17 / 95 159%

Find

Man beachte, dass die Ergebnisse, die von Markov-Ketten angenommen werden, unendliche Zustandsfolgen  $(s_0, s_1, \dots, s_n, \dots) \in S^{\mathbb{N}_0} = \Omega$  sind.

Eine endliche Folge von Zuständen beschreibt jeweils ein Ereignis als Menge von Zustandsfolgen, die diese von  $X_0$  aus durchlaufen.

Präfixfreie Mengen von Zustandsfolgen beschreiben disjunkte Ereignismengen.

Hinweis für zukünftige Wahrscheinlichkeitsbegriffe bzw. W'keitsräume:  $\ddagger$   
Man hat hier **keine** Elementarereignisse.

TUM ZÜ DWT ©Dr. Werner Meixner 7/25 LEA

ue04.pdf - Adobe Acrobat Professional

21 / 95 159%

Find

Die diskreten Zufallsvariablen  $T_{i,j}$  bzw.  $T_i$  für  $i, j \in \mathbb{N}_0$  mit

$$T_{i,j} = \min\{n \geq 1; X_n = j, \text{ wenn } X_0 = i\},$$

$$T_i = \min\{n \geq 1; X_n = i, \text{ wenn } X_0 = i\},$$

heißen **Übergangszeit** bzw. **Rückkehrzeit**.

Es gilt:

$$\Pr\{T_{i,j} = n\} = \Pr\{i \rightarrow j\}_n^{j-1} \quad (\text{Def. siehe Vorlesung}).$$

Beispiel:  $\ddagger$   
Zufallsvariable  $W$  der TA 3.1(c), die die Anzahl der Würfe zählt, bis man vom Zustand  $a$  aus im Zustand  $d$  angelangt ist.

TUM ZÜ DWT ©Dr. Werner Meixner 8/25 LEA

ue04.pdf - Adobe Acrobat Professional

24 / 95 159%

Find

**Man beachte:**

$T_{i,j}$  und  $T_i$  sind bedingte Zufallsvariable, die für Markovketten mit  $X_0 \neq i$  undefiniert bleiben können, weil die Gesamtheit dieser Markov-Ketten mit  $X_0 \neq i$  in dem durch  $X_0 = i$  bedingten Wahrscheinlichkeitsraum ein Ereignis mit Wahrscheinlichkeit 0 darstellt.

Wir entfernen aus  $\Omega$  alle Ergebnisfolgen mit  $X_0 \neq i$  und definieren den bedingten Ergebnisraum  $\Omega_{(X_0=i)} = \Omega \setminus \{(X_t)_{t \in \mathbb{N}_0}; X_0 \neq i\}$ .

Dann gelten  $T_{i,j} : \Omega_{(X_0=i)} \rightarrow \mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$  und  $T_i : \Omega_{(X_0=i)} \rightarrow \mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$ .

TUM ZÜ DWT ©Dr. Werner Meixner 9/25 LEA

Die Dichtefunktionen  $f_{T_{i,j}}$  und  $f_{T_i}$  haben also den Definitionsbereich  $\mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$ .

Im Allgemeinen gilt  $f_{T_{i,j}}(+\infty) \neq 0$  und  $f_{T_i}(+\infty) \neq 0$ .

Speziell gilt für alle  $x \in \mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$

$$f_{T_{i,j}}(x) = \begin{cases} 1 & : x = 0, \\ 0 & : \text{sonst.} \end{cases}$$

+

TUM ZÜ DWT ©Dr. Werner Meixner 10/25 LEA

**Man beachte:**

$T_{i,j}$  und  $T_i$  sind bedingte Zufallsvariable, die für Markovketten mit  $X_0 \neq i$  undefiniert bleiben können, weil die Gesamtheit dieser Markov-Ketten mit  $X_0 \neq i$  in dem durch  $X_0 = i$  bedingten Wahrscheinlichkeitsraum ein Ereignis mit Wahrscheinlichkeit 0 darstellt.

Wir entfernen aus  $\Omega$  alle Ergebnisfolgen mit  $X_0 \neq i$  und definieren den bedingten Ergebnisraum  $\Omega_{(X_0=i)} = \Omega \setminus \{(X_t)_{t \in \mathbb{N}_0}; X_0 \neq i\}$ .

Dann gelten

$$T_{i,j} : \Omega_{(X_0=i)} \rightarrow \mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\} \text{ und } T_i : \Omega_{(X_0=i)} \rightarrow \mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}.$$

TUM ZÜ DWT ©Dr. Werner Meixner 1 Thema: Markov-Ketten 9/25 LEA

### 1.1 Ankunfts- und Rückkehrwahrscheinlichkeit

Auf die Zufallsvariablen  $T_{i,j}$  und  $T_i$  stützen sich die Begriffe

Ankunftswahrscheinlichkeit bzw. Rückkehrwahrscheinlichkeit

$$f_{i,j} \text{ bzw. } f_i.$$

Es gelten  $f_{i,j} = \Pr[T_{i,j} < +\infty]$  und  $f_i = \Pr[T_i < +\infty]$ .

TUM ZÜ DWT ©Dr. Werner Meixner 1.1 Ankunfts- und Rückkehrwahrscheinlichkeit 11/25 LEA

Die folgenden **Eigenschaften einer Markov-Kette** hängen ausschließlich von der **Struktur des Übergangendiagramms** ab. (Siehe auch Satz 32 der Vorlesung!)

Man beachte, dass in das Übergangendiagramm nur Pfeile mit positiven Übergangswahrscheinlichkeiten eingetragen werden dürfen.

**Eigenschaften:**

$$f_i = 0, \quad 0 < f_i < 1, \quad f_i = 1,$$

$$f_{i,j} = 0, \quad 0 < f_{i,j} < 1, \quad f_{i,j} = 1.$$

TUM ZÜ DWT ©Dr. Werner Meixner 12/25 LEA

ue04.pdf - Adobe Acrobat Professional

36 / 95 159%

Find

$f_{i,j} = 0$  bzw.  $f_i = 0$ :

Es gibt keinen Pfad vom Knoten  $i$  nach Knoten  $j$  bzw. von  $i$  zurück auf sich selbst.

$f_{i,j} = 1$  bzw.  $f_i = 1$ :

Jeder bei  $i$  beginnende Pfad kann zu einem Pfad bis zu  $j$  bzw. zu  $i$  zurück verlängert werden.

$0 < f_{i,j} < 1$  bzw.  $0 < f_i < 1$ :

Die vorausgegangenen Eigenschaften treffen nicht zu.

TUM ZÜ DWT ©Dr. Werner Meixner 13/25 LEA

ue04.pdf - Adobe Acrobat Professional

40 / 95 159%

Find

Abgeleitete Eigenschaften für Zustände  $i \in S$ :

$i$  ist transient, falls  $f_i < 1$ .

$i$  ist rekurrent, falls  $f_i = 1$ .

$i$  ist absorbierend, falls  $f_{i,j} = 0$  für alle  $j \neq i$  gilt.

Bemerkung: Auch die Eigenschaften „irreduzibel“, „periodisch“ und „aperiodisch“ hängen ausschließlich von der Struktur des Übergangsdiagramms ab. Folglich gilt Gleiches auch für die Eigenschaft „ergodisch“.

TUM ZÜ DWT ©Dr. Werner Meixner 14/25 LEA

ue04.pdf - Adobe Acrobat Professional

44 / 95 159%

Find

**Berechnung** der Ankunfts- und Rückkehrwahrscheinlichkeiten:

Bei gegebener zeithomogener diskreter Markov-Kette (Übergangsmatrix) können alle  $f_{i,j}$  und  $f_i$  durch folgendes Verfahren gefunden werden:

1. Man bestimme, für welche  $i, j$  die Gleichungen  $f_{i,j} = 0$ ,  $f_{i,j} = 1$  bzw.  $f_i = 0$ ,  $f_i = 1$  gelten.
2. Man löse für die verbleibenden Wahrscheinlichkeiten die Gleichungen

$$f_{i,j} = p_{i,j} + \sum_{k \neq j} p_{i,k} f_{k,j} \quad \text{falls } i \neq j,$$

$$f_i = p_{i,i} + \sum_{k \neq i} p_{i,k} f_{k,i}.$$

Bemerkung: Wir können die Gleichungen „zeilenweise“ lösen.

TUM ZÜ DWT ©Dr. Werner Meixner 15/25 LEA

ue04.pdf - Adobe Acrobat Professional

48 / 95 159%

Find

**Berechnung** der Ankunfts- und Rückkehrwahrscheinlichkeiten:

Bei gegebener zeithomogener diskreter Markov-Kette (Übergangsmatrix) können alle  $f_{i,j}$  und  $f_i$  durch folgendes Verfahren gefunden werden:

1. Man bestimme, für welche  $i, j$  die Gleichungen  $f_{i,j} = 0$ ,  $f_{i,j} = 1$  bzw.  $f_i = 0$ ,  $f_i = 1$  gelten.
2. Man löse für die verbleibenden Wahrscheinlichkeiten die Gleichungen

$$f_{i,j} = p_{i,j} + \sum_{k \neq j} p_{i,k} f_{k,j} \quad \text{falls } i \neq j,$$

$$f_i = p_{i,i} + \sum_{k \neq i} p_{i,k} f_{k,i}.$$

Bemerkung: Wir können die Gleichungen „zeilenweise“ lösen.

TUM ZÜ DWT ©Dr. Werner Meixner 1.1 Ankunfts- und Rückkehrwahrscheinlichkeit 15/25 LEA

ue04.pdf - Adobe Acrobat Professional

48 / 95 159%

## 1.2 Erwartungswerte von $T_{i,j}$ und $T_i$

Erwartete Übergangszeit:  $h_{i,j} := \mathbb{E}[T_{i,j}]$ .

Erwartete Rückkehrzeit:  $h_i := \mathbb{E}[T_i]$ .

Beispiel: HA 3.1(c), TA 4.2

Es gilt:

Falls  $|S| < \infty$ , dann existieren die Erwartungswerte  $h_{i,j}$  bzw.  $h_i$  genau dann, wenn  $f_{i,j} = 1$  bzw.  $f_i = 1$  gilt.  
Die Berechnung erfolgt mit Gleichungssystem

$$h_{i,j} = 1 + \sum_{k \neq j} p_{i,k} h_{k,j} \quad \text{falls } i \neq j,$$

$$h_i = 1 + \sum_{k \neq i} p_{i,k} h_{k,i}.$$

TUM ZÜ DWT ©Dr. Werner Meixner 16/25 LEA

ue04.pdf - Adobe Acrobat Professional

53 / 95 159%

## 1.2 Erwartungswerte von $T_{i,j}$ und $T_i$

Erwartete Übergangszeit:  $h_{i,j} := \mathbb{E}[T_{i,j}]$ .

Erwartete Rückkehrzeit:  $h_i := \mathbb{E}[T_i]$ .

Beispiel: HA 3.1(c), TA 4.2

Es gilt:

Falls  $|S| < \infty$ , dann existieren die Erwartungswerte  $h_{i,j}$  bzw.  $h_i$  genau dann, wenn  $f_{i,j} = 1$  bzw.  $f_i = 1$  gilt.  
Die Berechnung erfolgt mit Gleichungssystem

$$h_{i,j} = 1 + \sum_{k \neq j} p_{i,k} h_{k,j} \quad \text{falls } i \neq j,$$

$$h_i = 1 + \sum_{k \neq i} p_{i,k} h_{k,i}.$$

TUM ZÜ DWT ©Dr. Werner Meixner 1.2 Erwartungswerte von  $T_{i,j}$  und  $T_i$  16/25 LEA

ue04.pdf - Adobe Acrobat Professional

53 / 95 159%

## 2. Vorbereitung auf HA von Blatt 4

Markov-Diagramm HA 4.1 (siehe Beispiel 1)

Tipps zu HA 4.1(b)

Tipps zu HA 4.1(c), Berechnung mit Gleichungssystem

TUM ZÜ DWT ©Dr. Werner Meixner 17/25 LEA

ue04.pdf - Adobe Acrobat Professional

58 / 95 159%

## 2.1 Tipps zu HA 4.1(b)

Für das Markov-Diagramm in Beispiel 1 berechnen wir mit Zuständen  $q_0 = 0, q_1 = 1, q_2 = 2, q_3 = 3$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  die Mengen bzw. Mengengrößen

$$A_0(n) = \{[q_0 \rightsquigarrow q_0]_n\},$$

$$A_1(n) = \{[q_0 \rightsquigarrow q_1]_n\},$$

$$A_2(n) = \{[q_0 \rightsquigarrow q_2]_n\} \quad \text{und}$$

$$A_3(n) = \{[q_0 \rightsquigarrow q_3]_n^{q=1}\}$$

wie folgt.

TUM ZÜ DWT ©Dr. Werner Meixner 18/25 LEA

ue04.pdf - Adobe Acrobat Professional

60 / 95 159%

Find

Einige Anfangswerte:

$$\begin{array}{lll}
 A_0(0) = 1, & A_0(1) = 1, & A_0(2) = 2, \\
 A_1(0) = 0, & A_1(1) = 1, & A_1(2) = 2, \\
 A_2(0) = 0, & A_2(1) = 0, & A_2(2) = 1, \\
 A_3(0) = 0, & A_3(1) = 0, & A_3(2) = 0.
 \end{array}$$

Rekursionsgleichungen:

$$\begin{array}{l}
 A_0(n) = A_0(n-1) + A_1(n-1), \\
 A_1(n) = A_0(n-1), \\
 A_2(n) = A_1(n-1) + A_2(n-1), \\
 A_3(n) = A_2(n-1).
 \end{array}$$

TUM ZÜ DWT ©Dr. Werner Meixner 19/25 LEA

ue04.pdf - Adobe Acrobat Professional

62 / 95 159%

Find

Eliminationsschritt nach:

$$\begin{array}{l}
 A_0(n) = A_0(n-1) + A_0(n-2), \\
 A_2(n) = A_2(n-1) + A_0(n-2).
 \end{array}$$

⊕

Mit Elimination des inhomogenen Anteils  $A_0$  für die Rekursion von  $A_2$  nach Vorlesung DS folgt:

$$\begin{array}{l}
 A_2(n) = A_2(n-1) + A_0(n-2), \\
 A_2(n+1) = A_2(n) + A_0(n-1), \\
 A_2(n+1) + A_2(n) = A_2(n) + A_2(n-1) + A_0(n), \\
 A_2(n+1) = A_2(n-1) + A_0(n), \\
 A_2(n+2) = A_2(n+1) + A_0(n), \\
 A_2(n+2) - A_2(n+1) = A_2(n+1) - A_2(n-1), \\
 A_2(n+3) = 2A_2(n+2) - A_2(n).
 \end{array}$$

TUM ZÜ DWT ©Dr. Werner Meixner 20/25 LEA

ue04.pdf - Adobe Acrobat Professional

64 / 95 159%

Find

Eliminationsschritt nach:

$$\begin{array}{l}
 A_0(n) = A_0(n-1) + A_0(n-2), \\
 A_2(n) = A_2(n-1) + A_0(n-2).
 \end{array}$$

⊕

Mit Elimination des inhomogenen Anteils  $A_0$  für die Rekursion von  $A_2$  nach Vorlesung DS folgt:

$$\begin{array}{l}
 A_2(n) = A_2(n-1) + A_0(n-2), \\
 A_2(n+1) = A_2(n) + A_0(n-1), \\
 A_2(n+1) + A_2(n) = A_2(n) + A_2(n-1) + A_0(n), \\
 A_2(n+1) = A_2(n-1) + A_0(n), \\
 A_2(n+2) = A_2(n+1) + A_0(n), \\
 A_2(n+2) - A_2(n+1) = A_2(n+1) - A_2(n-1), \\
 A_2(n+3) = 2A_2(n+2) - A_2(n).
 \end{array}$$

TUM ZÜ DWT ©Dr. Werner Meixner 2.1 Tipps zu HA 4.1(b) 20/25 LEA

ue04.pdf - Adobe Acrobat Professional

64 / 95 159%

Find

Zusammenfassung:

$A_0(n)$  ist offenbar die Folge der Fibonacci-Zahlen.

$A_2(n)$  genügt der Rekursion

$$A_2(n+3) - 2A_2(n+2) + A_2(n) = 0.$$

⊕

Diese homogene Rekursion 3. Ordnung löst man üblicherweise mit den Methoden aus DS wie folgt:

Charakteristisches Polynom:

$$z^3 - z^2 + 1 = 0$$

mit den Nullstellen 1 und  $\alpha_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$$z^3 - z^2 + 1 = (z-1)(z^2 - z - 1) = (z-1)(z-\alpha_1)(z-\alpha_2).$$

TUM ZÜ DWT ©Dr. Werner Meixner 21/25 LEA



ue04.pdf - Adobe Acrobat Professional

68 / 95 159%

Es gibt nun die entsprechende geschlossene Darstellung aller Lösungen.

Zu beachten ist, dass die Wahrscheinlichkeit für jeden Pfad der Länge  $n + 1$  im obigen Fall des Markov-Diagramms gleich dem Wert  $\frac{1}{2}^{n+1}$  ist.

TUM ZÜ DWT ©Dr. Werner Meixner 22/25 LEA

ue04.pdf - Adobe Acrobat Professional

70 / 95 159%

## 2.2 Tipps zu HA 4.1(c), Berechnung mit Gleichungssystem

Zur Kontrolle berechnen wir  $h_{0,3} = \mathbb{E}[W]$  wie in Abschnitt 1.2.

$$\begin{aligned} h_{0,3} &= 1 + \sum_{k \neq 3} p_{0,k} h_{k,3} \\ &= 1 + p_{0,0} h_{0,3} + p_{0,1} h_{1,3} + p_{0,2} h_{2,3} \\ &= 1 + \frac{1}{2} \cdot h_{0,3} + \frac{1}{2} \cdot h_{1,3} + 0 \cdot h_{2,3}, \end{aligned}$$

d.h.

$$h_{0,3} = 1 + \frac{1}{2} \cdot h_{0,3} + \frac{1}{2} \cdot h_{1,3}.$$

TUM ZÜ DWT ©Dr. Werner Meixner 23/25 LEA

ue04.pdf - Adobe Acrobat Professional

80 / 95 159%

Gleichung für  $h_{1,3}$ :

$$\begin{aligned} h_{1,3} &= 1 + \sum_{k \neq 3} p_{1,k} h_{k,3} \\ &= 1 + p_{1,0} h_{0,3} + p_{1,1} h_{1,3} + p_{1,2} h_{2,3} \\ &= 1 + \frac{1}{2} \cdot h_{0,3} + 0 \cdot h_{1,3} + \frac{1}{2} \cdot h_{2,3}. \end{aligned}$$

d.h.

$$h_{1,3} = 1 + \frac{1}{2} \cdot h_{0,3} + \frac{1}{2} \cdot h_{2,3}.$$

TUM ZÜ DWT ©Dr. Werner Meixner 24/25 LEA

ue04.pdf - Adobe Acrobat Professional

88 / 95 159%

Gleichung für  $h_{2,3}$ :

$$\begin{aligned} h_{2,3} &= 1 + \sum_{k \neq 3} p_{2,k} h_{k,3} \\ &= 1 + p_{2,0} h_{0,3} + p_{2,1} h_{1,3} + p_{2,2} h_{2,3} \\ &= 1 + 0 \cdot h_{0,3} + 0 \cdot h_{1,3} + \frac{1}{2} \cdot h_{2,3} \\ &= 1 + \frac{1}{2} \cdot h_{2,3}. \end{aligned}$$

Es folgt  $h_{2,3} = 2$ .

Durch Elimination folgt  $h_{0,3} = 8$ .

TUM ZÜ DWT ©Dr. Werner Meixner 25/25 LEA

ue04.pdf - Adobe Acrobat Professional

87 / 95 159%

Gleichung für  $h_{1,3}$ :

$$\begin{aligned}
 h_{1,3} &= 1 + \sum_{k \neq 3} p_{1,k} h_{k,3} \\
 &= 1 + p_{1,0} h_{0,3} + p_{1,1} h_{1,3} + p_{1,2} h_{2,3} \\
 &= 1 + \frac{1}{2} \cdot h_{0,3} + 0 \cdot h_{1,3} + \frac{1}{2} \cdot h_{2,3},
 \end{aligned}$$

d.h.

$$h_{1,3} = 1 + \frac{1}{2} \cdot h_{0,3} + \frac{1}{2} \cdot h_{2,3}.$$

TUM ZÜ DWT ©Dr. Werner Meixner 2.2 Tipps zu HA 4.1(c), Berechnung mit Gleichungssystem 24/25 LEA

ue04.pdf - Adobe Acrobat Professional

88 / 95 159%

Gleichung für  $h_{2,3}$ :

$$\begin{aligned}
 h_{2,3} &= 1 + \sum_{k \neq 3} p_{2,k} h_{k,3} \\
 &= 1 + p_{2,0} h_{0,3} + p_{2,1} h_{1,3} + p_{2,2} h_{2,3} \\
 &= 1 + 0 \cdot h_{0,3} + 0 \cdot h_{1,3} + \frac{1}{2} \cdot h_{2,3} \\
 &= 1 + \frac{1}{2} \cdot h_{2,3}.
 \end{aligned}$$

Es folgt  $h_{2,3} = 2$ .  
Durch Elimination folgt  $h_{0,3} = 8$ .

TUM ZÜ DWT ©Dr. Werner Meixner 25/25 LEA

ue04.pdf - Adobe Acrobat Professional

89 / 95 159%

Distance Tool

Gleichung für  $h_{2,3}$ :

$$\begin{aligned}
 \boxed{\phantom{h_{2,3}}} \quad \boxed{\phantom{h_{2,3}}} h_{2,3} &= 1 + \sum_{k \neq 3} p_{2,k} h_{k,3} \\
 \boxed{\phantom{h_{2,3}}} &= 1 + p_{2,0} h_{0,3} + p_{2,1} h_{1,3} + p_{2,2} h_{2,3} \\
 &= 1 + 0 \cdot h_{0,3} + 0 \cdot h_{1,3} + \frac{1}{2} \cdot h_{2,3} \\
 &= 1 + \frac{1}{2} \cdot h_{2,3}.
 \end{aligned}$$

Es folgt  $h_{2,3} = 2$ .  
Durch Elimination folgt  $h_{0,3} = 8$ .

TUM ZÜ DWT ©Dr. Werner Meixner 25/25 LEA

ue04.pdf - Adobe Acrobat Professional

60 / 95 159%

Einige Anfangswerte:

$$\begin{aligned}
 A_0(0) &= 1, & A_0(1) &= 1, & A_0(2) &= 2, \\
 A_1(0) &= 0, & A_1(1) &= 1, & A_1(2) &= \cancel{2}, \quad \checkmark \\
 A_2(0) &= 0, & A_2(1) &= 0, & A_2(2) &= 1, \\
 A_3(0) &= 0, & A_3(1) &= 0, & A_3(2) &= 0.
 \end{aligned}$$

Rekursionsgleichungen:

$$\begin{aligned}
 A_0(n) &= A_0(n-1) + A_1(n-1), \\
 A_1(n) &= A_0(n-1), \\
 A_2(n) &= A_1(n-1) + A_2(n-1), \\
 A_3(n) &= A_2(n-1).
 \end{aligned}$$

TUM ZÜ DWT ©Dr. Werner Meixner 19/25 LEA

ue04.pdf - Adobe Acrobat Professional

62 / 95 159%

## 2.1 Tipps zu HA 4.1(b)

Für das Markov-Diagramm in Beispiel 1 berechnen wir mit Zuständen  $q_0 = 0, q_1 = 1, q_2 = 2, q_3 = 3$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  die Mengen bzw. Mengengrößen

$$A_0(n) = |[q_0 \rightsquigarrow q_0]_n|,$$
$$A_1(n) = |[q_0 \rightsquigarrow q_1]_n|,$$
$$A_2(n) = |[q_0 \rightsquigarrow q_2]_n| \quad \text{und}$$
$$A_3(n) = |[q_0 \rightsquigarrow q_3]_n^{q_3=1}|$$

wie folgt.

TUM ZÜ DWT ©Dr. Werner Meixner 18/25 LEA

ue04.pdf - Adobe Acrobat Professional

60 / 95 159%

Einige Anfangswerte:

$$A_0(0) = 1, \quad A_0(1) = 1, \quad A_0(2) = 2,$$
$$A_1(0) = 0, \quad A_1(1) = 1, \quad A_1(2) = \cancel{2}, \quad \checkmark$$
$$A_2(0) = 0, \quad A_2(1) = 0, \quad A_2(2) = 1,$$
$$A_3(0) = 0, \quad A_3(1) = 0, \quad A_3(2) = 0.$$

Rekursionsgleichungen:

$$A_0(n) = A_0(n-1) + A_1(n-1),$$
$$A_1(n) = A_0(n-1),$$
$$A_2(n) = A_1(n-1) + A_2(n-1),$$
$$A_3(n) = A_2(n-1).$$

TUM ZÜ DWT ©Dr. Werner Meixner 19/25 LEA