

**Script** generated by TTT

Title: Meixner: ZUE\_DS\_WS2014 (14.01.2015)

Date: Wed Jan 14 16:57:54 CET 2015

Duration: 88:21 min

Pages: 32

WS 2014/15

# Zentralübung zur Vorlesung Diskrete Strukturen (Prof. Bungartz)

Dr. Werner Meixner

Fakultät für Informatik  
TU München

<http://www14.in.tum.de/lehre/2014WS/ds/uebung/>

14. Januar 2015

## Übersicht:

1. Übungsbetrieb Fragen, Probleme, Anregungen
2. Thema [Planare Graphen](#)  
Eulersche Polyederformel  
VA 1: Satz von Kuratowski  
VA 2: Spezielle Eigenschaften
3. Thema [Zirkuläres Rechnen](#)  
Zirkuläre Operationen  
VA 3: Rechnen modulo  $m$ , ganzzahlige Division  
VA 4: Testfragen
4. Vorbereitung [Algebra: VA 5](#)

## 1. Fragen, Anregungen?

Fragen?

Anregungen?

## 2. Thema: Planare Graphen

### 2.1 Eulersche Polyederformel

Eine der interessantesten Verallgemeinerungen des Begriffs der Bäume, sind die planaren Graphen.

Planare Graphen besitzen eine „kreuzungsfreie“ Darstellung in der 2-dimensionalen Euklidischen Ebene.

Dabei werden Knoten als Punkte, und Kanten als offene Strecken (Kurven), die zusammen mit den Endknoten eine abgeschlossene Strecke (Kurve) bilden, dargestellt.

Das **Mengenkomplement der Darstellung** eines Graphen in der Ebene setzt sich aus disjunkten Gebieten zusammen (das sind offene zusammenhängende Mengen der Ebene), die ausschließlich durch Knotenpunkte und Kantenstrecken (Kantenkurven) berandet sind.

Diese Gebiete kann man **Darstellungsgebiete** zum Graphen  $G$  nennen.

Es gibt genau ein Darstellungsgebiet  $r_\infty$ , das „Umgebung des projektiven Punktes  $\infty$ “ ist. Man nennt diese Menge ein **äußeres Gebiet** zu  $G$ .

Die übrigen Gebiete sind von Knotenpunkten und Kantenstrecken des Graphen als Rand umschlossen. Man nennt diese Gebiete **eingeschlossene Gebiete**.

Seien  $R_e$  die Menge der eingeschlossenen Gebiete eines planaren Graphen  $G$  und  $R$  die Menge aller Darstellungsgebiete von  $G$ .

Es gilt  $|R| = |R_e \cup \{r_\infty\}| = |R_e| + 1$ .

Beispiele siehe Tafel.

Für planare Graphen  $G = (V, E)$  mit der Menge  $K$  von Komponenten und der Menge  $R_e$  von eingeschlossenen Gebieten gelten die **Eulerschen Polyederformeln**:

$$|E| + |K| = |V| + |R_e|. \quad (1)$$

Offenbar kann die Gleichung wie folgt geschrieben werden:

$$|E| + |K| = |V| + |R| - 1. \quad (2)$$

Aufbau planarer Graphen in der Ebene:

	$ E $	+	$ K $	=	$ V $	+	$ R_e $
$G = \emptyset$ :	0	+	0	=	0	+	0
+ $v$ Knoten :	0	+	$v$	=	$v$	+	0
+ $b$ Brücken :	$b$	+	$v - b$	=	$v$	+	0
+ $t$ Trennkanten :	$b + t$	+	$v - b$	=	$v$	+	$t$
Gesamt :	$e$	+	$k$	=	$v$	+	$r_e$
Einbettung :	$e$	+	$k$	=	$v$	+	$r - 1$

Das Einfügen einer Trennkante zerteilt ein Darstellungsgebiet in zwei Teilgebiete.

### Bemerkungen:

- (Mehr als 2) Kanten eines Knoten kann man im Uhrzeigersinn ordnen.
- In der Zeichenebene kann man jeder Kante 2 Seiten (ohne Endpunkte) zuordnen.
- Jede Kantenseite grenzt an genau ein Gebiet.
- Die Ebene zerfällt in endlich viele disjunkte Gebiete und deren Ränder.
- Für jedes Darstellungsgebiet kann man die angrenzenden Kantenseiten zählen.  
Die Summe über alle Gebiete ergibt dann  $2|E|$ .

### Ungleichungen, falls $|E| \geq 2$ gilt

- Falls  $|E| \geq 2$  gilt, dann grenzt jedes Darstellungsgebiet an **mindestens 3** Kantenseiten.
- Falls  $|E| \geq 2$  gilt und  $G$  bipartit ist, dann grenzt jedes Darstellungsgebiet an **mindestens 4** Kantenseiten.

Es gilt:

$$|E| \leq 3|V| - 3 - 3|K|, \quad (1)$$

$$|E| \leq 2|V| - 2 - 2|K| \quad (\text{bipartite Graphen}) \quad (2)$$

### Beweis

Eulersche Polyederformel (umgestellt):

$$|E| - |V| + 1 + |K| = |R|.$$

(1):

Da jedes Gebiet an mindestens 3 der  $2|E|$  Kantenseiten grenzt und jede Kantenseite an genau ein Gebiet grenzt (keine Mehrfachzählung), gilt

$$3|R| \leq 2|E|.$$

Es folgt

$$3|E| - 3|V| + 3 + 3|K| = 3|R| \leq 2|E|,$$

$$\text{d.h. } |E| \leq 3|V| - 3 - 3|K|.$$

(2):

Da ein bipartiter Graph **dreiecksfrei** ist, grenzt jedes Gebiet an mindestens 4 der  $2|E|$  Kantenseiten. Da jede Kantenseite an genau ein Gebiet grenzt (keine Mehrfachzählung), gilt

$$4|R| \leq 2|E|.$$

Es folgt

$$4|E| - 4|V| + 4 + 4|K| = 4|R| \leq 2|E|,$$

$$\text{d.h. } |E| \leq 2|V| - 2 - 2|K|.$$



## 2.2 VA 1: Satz von Kuratowski

Wir untersuchen den vollständigen bipartiten Graph  $K_{3,3}$ .

- 1 Geben Sie 2 Unterteilungen des  $K_{3,3}$  mit 7 bzw. 8 Knoten an.
- 2 Man beweise: Entfernt man aus dem  $K_{3,3}$  eine beliebige Kante, dann ist der entstehende Graph **planar**.

Ein *vollständiger bipartiter Graph*  $K_{m,n}$  für  $m, n \in \mathbb{N}$  ist ein bipartiter Graph mit Knotenmenge  $V = V_1 \cup V_2$  und Kantenmenge  $E = \{\{a, b\} : a \in V_1, b \in V_2\}$ , wobei  $V_1$  und  $V_2$  disjunkt sind mit  $m = |V_1|$  und  $n = |V_2|$  Elementen.

Da ein  $K_{m,n}$  bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist, sprechen wir gelegentlich auch von „dem“ Graphen  $K_{m,n}$ .



## 2.2 VA 1: Satz von Kuratowski

Wir untersuchen den vollständigen bipartiten Graph  $K_{3,3}$ .

- 1 Geben Sie 2 **Unterteilungen** des  $K_{3,3}$  mit 7 bzw. 8 Knoten an.
- 2 Man beweise: Entfernt man aus dem  $K_{3,3}$  eine beliebige Kante, dann ist der entstehende Graph **planar**.

Ein *vollständiger bipartiter Graph*  $K_{m,n}$  für  $m, n \in \mathbb{N}$  ist ein bipartiter Graph mit Knotenmenge  $V = V_1 \cup V_2$  und Kantenmenge  $E = \{\{a, b\} : a \in V_1, b \in V_2\}$ , wobei  $V_1$  und  $V_2$  disjunkt sind mit  $m = |V_1|$  und  $n = |V_2|$  Elementen.

Da ein  $K_{m,n}$  bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist, sprechen wir gelegentlich auch von „dem“ Graphen  $K_{m,n}$ .



## 2.2 VA 1: Satz von Kuratowski

Wir untersuchen den vollständigen bipartiten Graph  $K_{3,3}$ .

- 1 Geben Sie 2 **Unterteilungen** des  $K_{3,3}$  mit 7 bzw. 8 Knoten an.
- 2 Man beweise: Entfernt man aus dem  $K_{3,3}$  eine beliebige Kante, dann ist der entstehende Graph **planar**.

Ein *vollständiger bipartiter Graph*  $K_{m,n}$  für  $m, n \in \mathbb{N}$  ist ein bipartiter Graph mit Knotenmenge  $V = V_1 \cup V_2$  und Kantenmenge  $E = \{\{a, b\} : a \in V_1, b \in V_2\}$ , wobei  $V_1$  und  $V_2$  disjunkt sind mit  $m = |V_1|$  und  $n = |V_2|$  Elementen.

Da ein  $K_{m,n}$  bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist, sprechen wir gelegentlich auch von „dem“ Graphen  $K_{m,n}$ .



- 1 Geben Sie 2 Unterteilungen des  $K_{3,3}$  mit 7 bzw. 8 Knoten an.

**Lösung:**

Unterteilt man einen Graph  $G = (V, E)$ , dann **ersetzt** man eine oder mehrere Kanten  $e \in E$  durch jeweils einen neuen Pfad.

Die Zwischenknoten und die Kanten des Pfades sind **neu**, d. h., nicht schon in  $G$  enthalten.

Die ersetzte Kante **verschwindet**.

Den dabei entstehenden Graph  $G' = (V', E')$  nennt man **Unterteilung von  $G$** . Es gilt dann  $e \notin E'$ .

Jede Unterteilung  $G''$  von  $G'$  ist auch eine Unterteilung von  $G$ , wobei  $G$  **kein Teilgraph** ist von  $G'$  oder  $G''$ .



Sei  $e = \{a, b\}$  eine Kante von  $(V, E) = K_{3,3}$ .

Wir entfernen  $e$  aus  $E$  und fügen einen neuen Knoten  $x \notin V$  zu  $V$  und 2 Kanten  $\{a, x\}, \{b, x\}$  zu  $E$ .

Der erhaltene Graph

$$G' = (V \cup \{x\}, (E \setminus \{e\}) \cup \{\{a, x\}, \{b, x\}\})$$

ist eine **Unterteilung von  $G$  mit 7 Knoten**.

Es gibt grundsätzlich 2 verschiedene Vorgehensweisen, aus  $(V, E) = K_{3,3}$  eine Unterteilung mit **8 Knoten** zu erhalten.

(i) Man ersetzt eine Kante  $e \in E$  durch einen neuen Pfad der Länge 4 (also mit 2 neuen Knoten).

(ii) Man ersetzt zwei Kanten  $e, f \in E$  durch je einen neuen Pfad der Länge 3 (also mit je 1 neuen Knoten).



- Man beweise: Entfernt man aus dem  $K_{3,3}$  eine beliebige Kante, dann ist der entstehende Graph **planar**.

**Lösung:**

Entfernt man aus dem  $K_{3,3}$  eine Kante, dann kann der **resultierende Graph  $R$**  natürlich keine Unterteilung des  $K_{3,3}$  mehr enthalten, weil die Anzahl der Kanten dann zu gering ist.

Aber auch eine Unterteilung des  $K_5$  kann nicht mehr in  $R$  enthalten sein, weil der  $K_5$  ja **10 Kanten** enthält und jede Unterteilung von  $K_5$  mehr als 10 Kanten enthalten müsste.

$R$  ist also nach dem Satz von Kuratowski **planar**.



## 2.3 VA 2: Spezielle Eigenschaften

Beweisen Sie:

- In jedem nichtleeren planaren Graph gibt es einen Knoten der höchstens Grad 5 hat (Satz der Vorlesung), d. h. einen Knoten der entweder Grad 5 oder einen kleineren Grad hat.
- Es gibt einen 5-regulären planaren Graph.



Wir beweisen:

- In jedem nichtleeren planaren Graph gibt es einen Knoten der höchstens Grad 5 hat.

**Lösung:**

Sei  $G = (V, E)$  ein planarer Graph. Dann haben wir zu zeigen, dass ein Knoten  $x$  mit  $deg(x) \leq 5$  existiert.

Wir führen einen Widerspruchsbeweis, indem wir annehmen, dass alle Knoten aus  $V$  mindestens den Grad 6 besitzen, d. h.  $deg(x) \geq 6$  gilt, und diese Annahme zum Widerspruch führen.



Wir beweisen:

- 1 In jedem nichtleeren planaren Graph gibt es einen Knoten der höchstens Grad 5 hat.

Lösung:

Sei  $G = (V, E)$  ein planarer Graph. Dann haben wir zu zeigen, dass ein Knoten  $x$  mit  $\deg(x) \leq 5$  existiert.

Wir führen einen Widerspruchsbeweis, indem wir annehmen, dass alle Knoten aus  $V$  mindestens den Grad 6 besitzen, d. h.  $\deg(x) \geq 6$  gilt, und diese Annahme zum Widerspruch führen.



Wir beweisen:

- 1 In jedem nichtleeren planaren Graph gibt es einen Knoten der höchstens Grad 5 hat.

Lösung:

Sei  $G = (V, E)$  ein planarer Graph. Dann haben wir zu zeigen, dass ein Knoten  $x$  mit  $\deg(x) \leq 5$  existiert.

Wir führen einen Widerspruchsbeweis, indem wir annehmen, dass alle Knoten aus  $V$  mindestens den Grad 6 besitzen, d. h.  $\deg(x) \geq 6$  gilt, und diese Annahme zum Widerspruch führen.



Sei also  $\deg(x) \geq 6$  für alle  $x \in V$ .

Es folgt zunächst  $|V| \geq 3$ .

Die Summe aller Gradzahlen von Knoten in  $G$  ist gleich dem Doppelten der Anzahl der Kanten, d. h. es gilt

$$\sum_{x \in V} \deg(x) = 2 \cdot |E|.$$

Mithin gilt

$$2 \cdot |E| = \sum_{x \in V} \deg(x) \geq |V| \cdot 6, \quad \text{d. h.} \quad |E| \geq 3|V|.$$

Andererseits gilt für planare Graphen mit mindestens 3 Knoten nach einem Satz über planare Graphen (siehe Buch von Steger)

$$|E| \leq 3 \cdot |V| - 6 < 3 \cdot |V|.$$

Widerspruch!



Sei also  $\deg(x) \geq 6$  für alle  $x \in V$ .

Es folgt zunächst  $|V| \geq 3$ .

Die Summe aller Gradzahlen von Knoten in  $G$  ist gleich dem Doppelten der Anzahl der Kanten, d. h. es gilt

$$\sum_{x \in V} \deg(x) = 2 \cdot |E|.$$

Mithin gilt

$$2 \cdot |E| = \sum_{x \in V} \deg(x) \geq |V| \cdot 6, \quad \text{d. h.} \quad |E| \geq 3|V|.$$

Andererseits gilt für planare Graphen mit mindestens 3 Knoten nach einem Satz über planare Graphen (siehe Buch von Steger)

$$|E| \leq 3 \cdot |V| - 6 < 3 \cdot |V|.$$

Widerspruch!

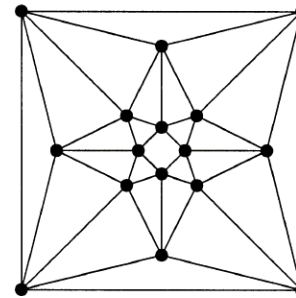


Wir beweisen:

- ② Es gibt einen 5-regulären planaren Graph.



Lösung:



### 3. Thema: Zirkuläres Rechnen

#### 3.1 Zirkuläre Operationen

Beispiel:

Operation (+1) auf  $\{0, 1, 2, 3\}$ :

0,  
 $0 + 1 = 1,$   
 $1 + 1 = 2,$   
 $2 + 1 = 3,$   
 $3 + 1 = 0,$   
 $0 + 1 = 1,$   
 $1 + 1 = 2,$   
 $2 + 1 = 3,$   
 $3 + 1 = 0,$   
 ... usw.



Bemerkung:

Wesentliche Teile der Algebra werden von zirkulären Operationen beherrscht, beispielsweise in Form der Potenzierung  $a^m$ , falls  $a^m = 1$  gilt.

$$1, a, a^2, a^3, a^4, \dots, a^{m-1}, a^m = 1, a, a^2, \dots$$

Zirkuläres Rechnen ist eine Rechnungsart, die über die Schulmathematik hinausgeht.





Ganze Zahlen  $a, b \in \mathbb{Z}$  nennt man

kongruent modulo  $m$ , mit  $m \in \mathbb{N}$ , i. Z.

$$a \equiv b \pmod{m},$$

falls sich  $a$  und  $b$  um ein ganzzahliges Vielfaches von  $m$  unterscheiden, d. h.,

falls es ein  $k \in \mathbb{Z}$  gibt, so dass gilt

$$a = b + k \cdot m.$$

Man schreibt auch  $a \equiv_m b$  für  $a \equiv b \pmod{m}$ .

$\equiv_m$  ist eine Äquivalenzrelation über  $\mathbb{Z}$ ,

ja sogar eine „Kongruenzrelation“.



Davon abgeleitet ist die Definition der Operation  $\text{mod} : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ :

$$b = a \text{ mod } m \iff a \equiv b \pmod{m} \text{ und } 0 \leq b < m.$$

Für jedes  $m$  ist  $\text{mod } m$  eine unäre Operation über  $\mathbb{Z}$ .

$a \text{ mod } m$  heißt Rest der natürlichen Division von  $a$  durch  $m$ .



### 3.2 VA 3: Rechengesetze modulo $m$

Zeigen Sie für alle  $a, b \in \mathbb{Z}$  und  $m \in \mathbb{N}$ :

$$a \equiv a \text{ mod } m \pmod{m}, \quad (3)$$

$$(a + b) \text{ mod } m = [(a \text{ mod } m) + (b \text{ mod } m)] \text{ mod } m, \quad (4)$$

$$(a \cdot b) \text{ mod } m = [(a \text{ mod } m) \cdot (b \text{ mod } m)] \text{ mod } m. \quad (5)$$



Es gilt  $0 \leq x, y < m$  und

$$x = a + b + k_x \cdot m,$$

$$y = (a \text{ mod } m) + (b \text{ mod } m) + k_y \cdot m,$$

$$(a \text{ mod } m) = a + k_a \cdot m,$$

$$(b \text{ mod } m) = b + k_b \cdot m$$

für gewisse  $k_a, k_b, k_x, k_y \in \mathbb{Z}$  und es folgt

$$\begin{aligned} y &= a + k_a \cdot m + b + k_b \cdot m + k_y \cdot m \\ &= x - k_x \cdot m + k_a \cdot m + k_b \cdot m + k_y \cdot m \\ &= x + (k_a + k_b + k_y - k_x) \cdot m \\ &= x + k \cdot m. \end{aligned}$$

Wegen  $0 \leq x, y < m$  folgt  $x = y$ .





### 3.3 VA 3: Ganzzahlige Division

In enger Beziehung zur mod-Operation steht die **ganzzahlige Division**  $a \operatorname{div} m$  zweier Zahlen  $a \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$ .

Es gilt

$$a = (a \operatorname{div} m) \cdot m + (a \operatorname{mod} m).$$

Berechnen Sie:

- (i)  $5 \operatorname{div} 4$ ,      (ii)  $(-5) \operatorname{div} 4$ ,      (iii)  $(-x) \operatorname{div} 1$ .