

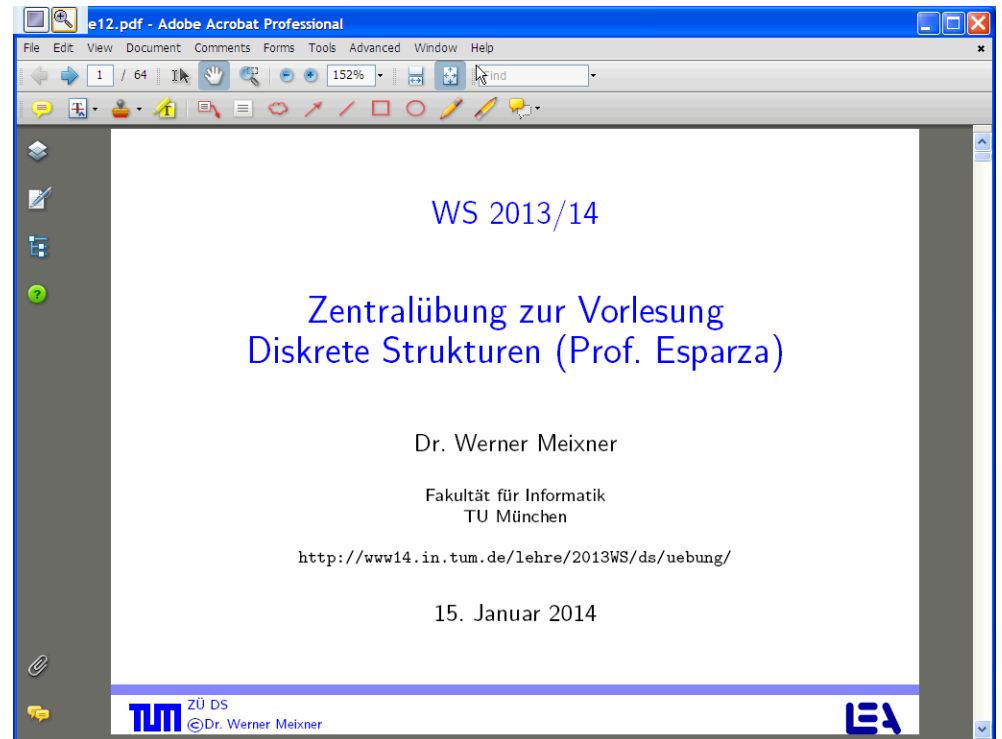
Script generated by TTT

Title: Meixner: ZUE_DS (15.01.2014)

Date: Wed Jan 15 17:34:14 CET 2014

Duration: 55:23 min

Pages: 27



Wie viele Darstellungen besitzt ein Zyklus der Länge 3?

Antwort: 3.

Begründung:

Sei π ein Zyklus der Länge 3 mit Basis $M(\pi) = \{a, b, c\}$. Für jede Darstellung $z = (a_1, a_2, a_3)$ von π gilt

$$a_1 \in M, \quad a_2 = \pi(a_1), \quad a_3 = \pi^2(a_1) = \pi(a_2).$$

Damit gibt es genau die folgenden drei Darstellungen

$$z_1 = (a, \pi(a), \pi^2(a)), \quad z_2 = (b, \pi(b), \pi^2(b)), \quad z_3 = (c, \pi(c), \pi^2(c)).$$

TUM ZÜ DS ©Dr. Werner Meixner 6/24 LEA



Wie viele Darstellungen besitzt ein Zyklus der Länge 3?

Antwort: 3.

Begründung:

Sei π ein Zyklus der Länge 3 mit Basis $M(\pi) = \{a, b, c\}$. Für jede Darstellung $z = (a_1, a_2, a_3)$ von π gilt

$$a_1 \in M, \quad a_2 = \pi(a_1), \quad a_3 = \pi^2(a_1) = \pi(a_2).$$

Damit gibt es genau die folgenden drei Darstellungen

$$z_1 = (a, \pi(a), \pi^2(a)), \quad z_2 = (b, \pi(b), \pi^2(b)), \quad z_3 = (c, \pi(c), \pi^2(c)).$$



Welchen Zyklus stellt $z = (4, 1, 3, 2)$ dar und welche Basis hat der Zyklus?

Antwort:

Die Basis von $z = (4, 1, 3, 2)$ ist $M_z = \{1, 2, 3, 4\}$.

Für den dargestellten Zyklus $\pi_z : M \rightarrow M$ gilt

$$\pi_z(1) = 3, \quad \pi_z(2) = 4, \quad \pi_z(3) = 2, \quad \pi_z(4) = 1.$$



Welche verschiedenen Darstellungen hat π_z^3 ?

Antwort:

Es gilt

$$\begin{aligned} \pi_z^3(1) &= \pi_z^2(\pi_z(1)) = \pi_z^2(3) = \pi_z(\pi_z(3)) = \pi_z(2) = 4, \\ \pi_z^3(2) &= \pi_z^2(\pi_z(2)) = \pi_z^2(4) = \pi_z(\pi_z(4)) = \pi_z(1) = 3, \\ \pi_z^3(3) &= \pi_z^2(\pi_z(3)) = \pi_z^2(2) = \pi_z(\pi_z(2)) = \pi_z(4) = 1, \\ \pi_z^3(4) &= \pi_z^2(\pi_z(4)) = \pi_z^2(1) = \pi_z(\pi_z(1)) = \pi_z(3) = 2. \end{aligned}$$

π_z^3 ist ein Zyklus mit genau den folgenden 4 Darstellungen.

$$z_1 = (1, 4, 2, 3), \quad z_2 = (2, 3, 1, 4), \quad z_3 = (3, 1, 4, 2), \quad z_4 = (4, 2, 3, 1).$$



Welche verschiedenen Darstellungen hat π_z^3 ?

Antwort:

Es gilt

$$\begin{aligned} \pi_z^3(1) &= \pi_z^2(\pi_z(1)) = \pi_z^2(3) = \pi_z(\pi_z(3)) = \pi_z(2) = 4, \\ \pi_z^3(2) &= \pi_z^2(\pi_z(2)) = \pi_z^2(4) = \pi_z(\pi_z(4)) = \pi_z(1) = 3, \\ \pi_z^3(3) &= \pi_z^2(\pi_z(3)) = \pi_z^2(2) = \pi_z(\pi_z(2)) = \pi_z(4) = 1, \\ \pi_z^3(4) &= \pi_z^2(\pi_z(4)) = \pi_z^2(1) = \pi_z(\pi_z(1)) = \pi_z(3) = 2. \end{aligned}$$

π_z^3 ist ein Zyklus mit genau den folgenden 4 Darstellungen.

$$z_1 = (1, 4, 2, 3), \quad z_2 = (2, 3, 1, 4), \quad z_3 = (3, 1, 4, 2), \quad z_4 = (4, 2, 3, 1).$$



Ist π_z^4 ein Zyklus?

Antwort: Nein!

Begründung:

Es gilt

$$\begin{aligned}\pi_z^4(1) &= \pi_z(\pi_z^3(1)) = 1, \\ \pi_z^4(2) &= \pi_z(\pi_z^3(2)) = 2, \\ \pi_z^4(3) &= \pi_z(\pi_z^3(3)) = 3, \\ \pi_z^4(4) &= \pi_z(\pi_z^3(4)) = 4.\end{aligned}$$

π_z^4 ist kein Zyklus, weil $|\{(\pi^4)^n(1) \mid n \in \mathbb{N}\}| = 1 \neq 4$.

Tatsächlich ist π_z^4 gleich der Identität *id*.



Zyklen ρ, σ heißen *disjunkt*, falls $M(\rho) \cap M(\sigma) = \emptyset$ gilt, d. h., falls deren Basismengen disjunkt sind.

Eine Menge Z von paarweise disjunkten Zyklen heißt *Zykluspartition*.

Dabei bildet die Menge der Basismengen

$$P_Z = \{M(\pi) \mid \pi \in Z\}$$

eine Mengenteilung der Vereinigung der Basismengen

$$M(Z) = \bigcup_{\pi \in Z} M(\pi).$$

Wir sagen, dass Z eine Zykluspartition der Menge $M(Z)$ ist.



- 2 Welche Basis haben die Zyklen zu $z_1 = (2, 5), z_2 = (1), z_3 = (5, 4, 3, 2, 1)$?

Geben Sie eine *extensionale Darstellung* der Abbildungen π_{z_i} an!

Warum ist $Z = \{\pi_{z_1}, \pi_{z_2}, \pi_{z_3}\}$ keine Zykluspartition von $[5]$?



Welche Basis haben die Zyklen zu $z_1 = (2, 5), z_2 = (1), z_3 = (5, 4, 3, 2, 1)$?

Antwort:

Für die Basismengen $M(\pi_{z_i})$ gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned}M(\pi_{z_1}) &= \{2, 5\}, \\ M(\pi_{z_2}) &= \{1\}, \\ M(\pi_{z_3}) &= \{1, 2, 3, 4, 5\}.\end{aligned}$$



Geben Sie eine extensionale Darstellung der Abbildungen π_{z_i} an!

Antwort:

Es gilt mit Auflistung der Funktionswerte

$$\pi_{z_1}(2) = 5, \quad \pi_{z_1}(5) = 2.$$

$$\pi_{z_2}(1) = 1.$$

$$\pi_{z_3}(1) = 5, \quad \pi_{z_3}(2) = 1, \quad \pi_{z_3}(3) = 2, \quad \pi_{z_3}(4) = 3, \quad \pi_{z_3}(5) = 4.$$



Warum ist $Z = \{\pi_{z_1}, \pi_{z_2}, \pi_{z_3}\}$ keine Zyklenpartition von $[5]$?

Antwort:

Offenbar sind die Zyklen nicht paarweise disjunkt.

Für die Basismengen gilt z. B. $M(\pi_{z_1}) \cap M(\pi_{z_3}) \neq \emptyset$.



Sei Z eine Zyklenpartition von $[n]$. Dann ist eine bijektive Abbildung $f_Z : [n] \rightarrow [n]$ gegeben für alle $i \in [n]$ durch

$$f_Z(i) = \pi(i), \quad \text{falls } i \in M(\pi) \text{ und } \pi \in Z.$$

- 3 Zyklenpartitionen werden häufig durch eine Folge $z_1 z_2 \dots z_k$ von Zyklusdarstellungen z_i definiert, wobei die Reihenfolge der z_i in der Folge keine Rolle spielt.

Sei $Z = (4, 5, 1)(3)(2)$ eine Zyklenpartition.

Beschreiben Sie die Abbildung f_Z *extensional*!



Lösung:

Für f_Z gilt mit Auflistung der Funktionswerte

$$f_Z(1) = 4, \quad f_Z(2) = 2, \quad f_Z(3) = 3, \quad f_Z(4) = 5, \quad f_Z(5) = 1.$$



Sei Z eine Zyklenpartition von $[n]$. Dann ist eine bijektive Abbildung $f_Z : [n] \rightarrow [n]$ gegeben für alle $i \in [n]$ durch

$$f_Z(i) = \pi(i), \quad \text{falls } i \in M(\pi) \text{ und } \pi \in Z.$$

- 3 Zyklenpartitionen werden häufig durch eine Folge $z_1 z_2 \dots z_k$ von Zyklusdarstellungen z_i definiert, wobei die Reihenfolge der z_i in der Folge keine Rolle spielt.

Sei $Z = (4, 5, 1)(3)(2)$ eine Zyklenpartition.

Beschreiben Sie die Abbildung f_Z **extensional!**



Lösung:

Für f_Z gilt mit Auflistung der Funktionswerte

$$f_Z(1) = 4, \quad f_Z(2) = 2, \quad f_Z(3) = 3, \quad f_Z(4) = 5, \quad f_Z(5) = 1.$$



- 4 Eine Funktion f sei gegeben durch die folgende Matrixdarstellung.

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 1 & 6 & 2 & 7 & 9 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie

$$\{f^i(2); i \in \mathbb{N}\}, \{f^i(3); i \in \mathbb{N}\}, \{f^i(5); i \in \mathbb{N}\}!$$

Bestimmen Sie eine *Zyklendarstellung* von f ,

d. h. eine **Zyklenpartition** Z von $[9]$,

so dass $f(i) = f_Z(i)$ für alle $i \in [9]$ gilt!



Lösung:

Durch Auswertung von $f_Z^i(x)$ erhält man

$$\{f_Z^i(2); i \in \mathbb{N}\} = \{1, 8, 4, 2\}, \quad (1)$$

$$\{f_Z^i(3); i \in \mathbb{N}\} = \{6, 9, 3\}, \quad (2)$$

$$\{f_Z^i(5); i \in \mathbb{N}\} = \{7, 5\}. \quad (3)$$

Wir bezeichnen die Mengen in den Gleichungen (1), (2) und (3) entsprechend mit M_1 , M_2 bzw. M_3 . Dann definiert f je einen Zyklus f_i auf den Basismengen M_1 , M_2 und M_3 mit den entsprechenden Darstellungen

$$z_1 = (1, 8, 4, 2), \quad z_2 = (6, 9, 3) \quad \text{bzw.} \quad z_3 = (7, 5).$$

Zyklenpartition bzw. *Zyklendarstellung* von f :

$$Z = (1, 8, 4, 2)(6, 9, 3)(7, 5).$$



Lösung:

Durch Auswertung von $f_Z^i(x)$ erhält man

$$\{f_Z^i(2); i \in \mathbb{N}\} = \{1, 8, 4, 2\}, \quad (1)$$

$$\{f_Z^i(3); i \in \mathbb{N}\} = \{6, 9, 3\}, \quad (2)$$

$$\{f_Z^i(5); i \in \mathbb{N}\} = \{7, 5\}. \quad (3)$$

Wir bezeichnen die Mengen in den Gleichungen (1), (2) und (3) entsprechend mit M_1 , M_2 bzw. M_3 . Dann definiert f je einen Zyklus f_i auf den Basismengen M_1 , M_2 und M_3 mit den entsprechenden Darstellungen

$$z_1 = (1, 8, 4, 2), \quad z_2 = (6, 9, 3) \quad \text{bzw.} \quad z_3 = (7, 5).$$

Zykluspartition bzw. Zyklendarstellung von f :

$$Z = (1, 8, 4, 2)(6, 9, 3)(7, 5).$$



3. Abzählen mit Nebenbedingung

In einem Rangierbahnhof gibt es 30 parallel laufende Gleise, auf denen Schwertransporte zusammengestellt werden. Wegen der übermäßigen Breite der Ladung können keine zwei Züge auf benachbarten Gleisen plaziert werden.

Wie viele Möglichkeiten gibt es, 9 (nicht unterscheidbare) Züge auf die Gleise so zu verteilen, dass sich die Züge nicht behindern?



Lösung:

In dieser Aufgabe treten erstmalig **Nebenbedingungen** auf, deren Beachtung vorbereitende Überlegungen erfordern.

9 Züge benötigen minimal 17 Gleise, wenn man sie möglichst dicht aufeinanderfolgen läßt, denn zwischen den Zügen müssen sich mindestens 8 Gleise befinden.



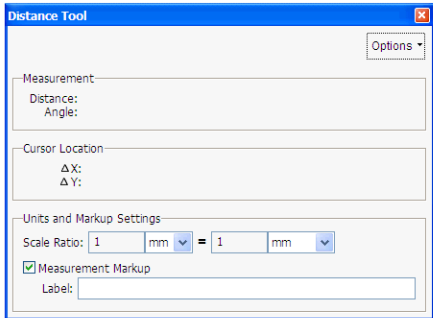
An den 10 Stellen vor oder nach einem Zug können noch 13 freie Gleise eingefügt werden.

Die Verteilung entspricht einer Zuordnung von $n = 13$ nicht unterscheidbaren Gleisen auf $r = 10$ unterscheidbare Stellen.

Dies entspricht der Anzahl von $n = 13$ -elementigen Multiteilmengen einer $r = 10$ -elementigen Menge.

Für die gesuchte Anzahl x folgt

$$x = \frac{10^{\overline{13}}}{13!} = \binom{22}{13} = \binom{22}{9} = 22 \cdot 19 \cdot 17 \cdot 14 \cdot 5 = 497420.$$



nach einem Zug können noch 13 freie

er Zuordnung von $n = 13$ nicht
 $r = 10$ unterscheidbare Stellen.

n $n = 13$ -elementigen
elementigen Menge.

Für die gesuchte Anzahl x folgt

$$x = \frac{10^{13}}{13!} = \binom{22}{13} = \binom{22}{9} = 22 \cdot 19 \cdot 17 \cdot 14 \cdot 5 = 497420.$$



An den 10 Stellen vor oder nach einem Zug können noch 13 freie
Gleise eingefügt werden.

Die Verteilung entspricht einer Zuordnung von $n = 13$ nicht
unterscheidbaren Gleisen auf $r = 10$ unterscheidbare Stellen.

Dies entspricht der Anzahl von $n = 13$ -elementigen
Multiteilmengen einer $r = 10$ -elementigen Menge.

Für die gesuchte Anzahl x folgt

$$x = \frac{10^{13}}{13!} = \binom{22}{13} = \binom{22}{9} = 22 \cdot 19 \cdot 17 \cdot 14 \cdot 5 = 497420.$$



ad HA 12.1:

Falls $x, y \in V$, so dass $\{x, y\} \notin E$ gilt. Dann gibt es einen Pfad
von x nach y . Auf dem Weg von x nach y muss es einen Knoten b
geben, so dass $\{b\} \cup \Gamma(b)$ mindestens 3 Knoten enthält und keine
Clique ist.



ad HA 12.2:

Sei n die Anzahl der Knoten. Als Knotengrade kommen nur Zahlen
aus $\{0, 1, \dots, n - 1\}$ in Frage. Wenn ein Knotengrad 0 vorkommt,
dann besitzt kein Knoten den Grad $n - 1$. Wenn dagegen der
Knotengrad 0 nicht vorkommt, dann können ebenfalls höchstens
 $n - 1$ verschiedene Knotengrade angenommen werden.

ad HA 12.3:

Siehe ZÜ 11.

