Script generated by TTT

Title: Seidl: Theoretische_Informatik (01.07.2013)

Date: Mon Jul 01 10:15:39 CEST 2013

Duration: 90:21 min

Pages: 105

Es müssen nicht immer TM sein:

Satz 4.65 (Matiyasevich 1970, Hilberts 10. Problem)

Es ist unentscheidbar, ob ein Polynom in n Variablen mit ganzzahligen Koeffizienten eine ganzzahlige Nullstelle hat ($\in \mathbb{Z}^n$).

Es müssen nicht immer TM sein:

Satz 4.65 (Matiyasevich 1970, Hilberts 10. Problem)

Es ist unentscheidbar, ob ein Polynom in n Variablen mit ganzzahligen Koeffizienten eine ganzzahlige Nullstelle hat ($\in \mathbb{Z}^n$).

Beweis:

$$H \leq H_{10}$$

□

Bemerkungen

- Nicht alle unentscheidbaren Probleme sind gleich schwer

Bemerkungen

- Nicht alle unentscheidbaren Probleme sind gleich schwer
- ZB gilt: Das Äquivalenzproblem

$$Eq := \{u\#v \mid M_u \text{ berechnet die gleiche Funktion wie } M_v\}$$

Bemerkungen

- Nicht alle unentscheidbaren Probleme sind gleich schwer
- ZB gilt: Das Äquivalenzproblem

$$Eq := \{u\#v \mid M_u \text{ berechnet die gleiche Funktion wie } M_v\}$$

ist schwerer als das Halteproblem:

$$H \leq Eq \qquad \text{aber} \qquad Eq \not\leq H$$

Bemerkungen

- Nicht alle unentscheidbaren Probleme sind gleich schwer
- ZB gilt: Das Äquivalenzproblem

$$Eq := \{u\#v \mid M_u \text{ berechnet die gleiche Funktion wie } M_v\}$$

ist schwerer als das Halteproblem:

$$H \leq Eq \qquad \text{aber} \qquad Eq \not\leq H$$

- Es gibt sogar eine unendliche Folge

$$A_0 \leq A_1 \leq A_2 \leq \cdots$$

4.10 Semi-Entscheidbarkeit

4.10 Semi-Entscheidbarkeit

Definition 4.66
Eine Menge A ($\subseteq \mathbb{N}$ oder Σ^*) heißt semi-entscheidbar (s-e) gdw

$$\chi'_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A \\ \bot & \text{falls } x \notin A \end{cases}$$

berechenbar ist.

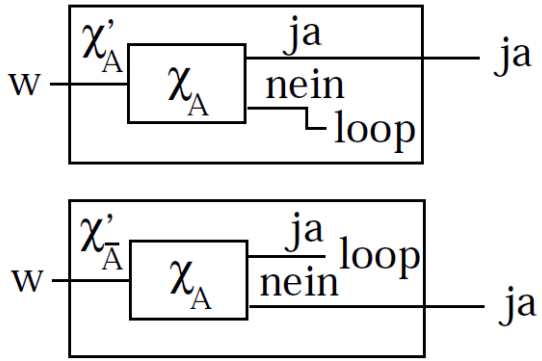
Satz 4.67
Eine Menge A ist entscheidbar gdw sowohl A als auch $\overline{A}$ s-e sind.

Satz 4.67
Eine Menge A ist entscheidbar gdw sowohl A als auch $\overline{A}$ s-e sind.

Beweis:
„⇒“: Wandle TM für χ_A in TM für χ'_A und $\chi'_{\overline{A}}$ um:

Satz 4.67
Eine Menge A ist entscheidbar gdw sowohl A als auch $\overline{A}$ s-e sind.

Beweis:
„⇒“: Wandle TM für χ_A in TM für χ'_A und $\chi'_{\overline{A}}$ um:



Beweis (Forts.):

„⇐“:
Wandle TM M_1 für χ'_A und TM M_2 für $\chi'_{\overline{A}}$ in TM für χ_A um:

input(x);
for $s := 0, 1, 2, \ldots$ **do**
  if $M_1[x]$ hält in s Schritten **then** output(1); **halt** **fi** ;

Beweis (Forts.):

„⇐“:
Wandle TM M_1 für χ'_A und TM M_2 für $\chi'_{\overline{A}}$ in TM für χ_A um:

input(x);
for $s := 0, 1, 2, \ldots$ **do**
  if $M_1[x]$ hält in s Schritten **then** output(1); **halt** **fi** ;
  if $M_2[x]$ hält in s Schritten **then** output(0); **halt** **fi**

Beweis (Forts.):

„⇐“:
Wandle TM M_1 für χ'_A und TM M_2 für $\chi'_{\overline{A}}$ in TM für χ_A um:

input(x);
for $s := 0, 1, 2, \ldots$ **do**
  if $M_1[x]$ hält in s Schritten **then** output(1); **halt** **fi** ;
  if $M_2[x]$ hält in s Schritten **then** output(0); **halt** **fi**

Formulierung mit Parallelismus:

input(x);
führe $M_1[x]$ und $M_2[x]$ parallel aus;
hält M_1, gib 1 aus, hält M_2, gib 0 aus. □

Beweis (Forts.):

„⇐“:
Wandle TM M_1 für χ'_A und TM M_2 für $\chi'_{\overline{A}}$ in TM für χ_A um:

input(x);
for $s := 0, 1, 2, \ldots$ **do**
  if $M_1[x]$ hält in s Schritten **then** output(1); **halt** **fi** ;
  if $M_2[x]$ hält in s Schritten **then** output(0); **halt** **fi**

Formulierung mit Parallelismus:

input(x);
führe $M_1[x]$ und $M_2[x]$ parallel aus;
hält M_1, gib 1 aus, hält M_2, gib 0 aus. □

Lemma 4.68
Ist $A \leq B$ und ist B s-e, so ist auch A s-e.

Definition 4.69
Eine Menge A heißt rekursiv aufzählbar (*recursively enumerable*) gdw $A = \emptyset$ oder es eine berechenbare totale Funktion $f : \mathbb{N} \to A$ gibt, so dass

$$A = \{f(0), f(1), f(2), \ldots\}$$

Definition 4.69
Eine Menge A heißt rekursiv aufzählbar (*recursively enumerable*) gdw $A = \emptyset$ oder es eine berechenbare totale Funktion $f : \mathbb{N} \to A$ gibt, so dass

$$A = \{f(0), f(1), f(2), \ldots\}$$

Bemerkung:

- Es dürfen Elemente doppelt auftreten ($f(i) = f(j)$ für $i \neq j$)
- Die Reihenfolge ist beliebig.

Definition 4.69
Eine Menge A heißt rekursiv aufzählbar (*recursively enumerable*) gdw $A = \emptyset$ oder es eine berechenbare totale Funktion $f : \mathbb{N} \to A$ gibt, so dass

$$A = \{f(0), f(1), f(2), \ldots\}$$

Bemerkung:

- Es dürfen Elemente doppelt auftreten ($f(i) = f(j)$ für $i \neq j$)
- Die Reihenfolge ist beliebig.

Warnung: Rekursiv aufzählbar $\neq$ abzählbar!

Definition 4.69
Eine Menge A heißt rekursiv aufzählbar (*recursively enumerable*) gdw $A = \emptyset$ oder es eine berechenbare totale Funktion $f : \mathbb{N} \to A$ gibt, so dass

$$A = \{f(0), f(1), f(2), \ldots\}$$

Bemerkung:

- Es dürfen Elemente doppelt auftreten ($f(i) = f(j)$ für $i \neq j$)
- Die Reihenfolge ist beliebig.

Warnung: Rekursiv aufzählbar $\neq$ abzählbar!

- Rekursiv aufzählbar $\implies$ abzählbar

Definition 4.69

Eine Menge A heißt rekursiv aufzählbar (*recursively enumerable*) gdw $A = \emptyset$ oder es eine berechenbare totale Funktion $f : \mathbb{N} \to A$ gibt, so dass

$$A = \{f(0), f(1), f(2), \ldots\}$$

Bemerkung:

- Es dürfen Elemente doppelt auftreten ($f(i) = f(j)$ für $i \neq j$)
- Die Reihenfolge ist beliebig.

Warnung: Rekursiv aufzählbar $\neq$ abzählbar!

- Rekursiv aufzählbar $\implies$ abzählbar
- Aber nicht umgekehrt:
  $\overline{K} \subseteq \{0,1\}^*$ ist abzählbar aber nicht rekursiv aufzählbar (s.u.)

Lemma 4.70

Eine Menge A ist rekursiv aufzählbar gdw sie semi-entscheidbar ist.

Lemma 4.70

Eine Menge A ist rekursiv aufzählbar gdw sie semi-entscheidbar ist.

Beweis:

Der Fall $A = \emptyset$ ist trivial. Sei $A \neq \emptyset$.

Lemma 4.70

Eine Menge A ist rekursiv aufzählbar gdw sie semi-entscheidbar ist.

Beweis:

Der Fall $A = \emptyset$ ist trivial. Sei $A \neq \emptyset$.

„$\Rightarrow$“:

Sei A rekursiv aufzählbar mit f. Dann ist A semi-entscheidbar:

Lemma 4.70
Eine Menge A ist rekursiv aufzählbar gdw sie semi-entscheidbar ist.

Beweis:
Der Fall $A = \emptyset$ ist trivial. Sei $A \neq \emptyset$.

„$\Rightarrow$“:
Sei A rekursiv aufzählbar mit f. Dann ist A semi-entscheidbar:

input(x);
for $i := 0, 1, 2, \ldots$ **do**

Lemma 4.70
Eine Menge A ist rekursiv aufzählbar gdw sie semi-entscheidbar ist.

Beweis:
Der Fall $A = \emptyset$ ist trivial. Sei $A \neq \emptyset$.

„$\Rightarrow$“:
Sei A rekursiv aufzählbar mit f. Dann ist A semi-entscheidbar:

input(x);
for $i := 0, 1, 2, \ldots$ **do**
  if $f(i) = x$ **then** output(1); **halt** **fi**

Lemma 4.70
Eine Menge A ist rekursiv aufzählbar gdw sie semi-entscheidbar ist.

Beweis:
Der Fall $A = \emptyset$ ist trivial. Sei $A \neq \emptyset$.

„$\Rightarrow$“:
Sei A rekursiv aufzählbar mit f. Dann ist A semi-entscheidbar:

input(x);
for $i := 0, 1, 2, \ldots$ **do**
  if $f(i) = x$ **then** output(1); **halt** **fi**

„$\Leftarrow$“: Wir nehmen an $A \subseteq \mathbb{N}$.

Lemma 4.70
Eine Menge A ist rekursiv aufzählbar gdw sie semi-entscheidbar ist.

Beweis:
Der Fall $A = \emptyset$ ist trivial. Sei $A \neq \emptyset$.

„$\Rightarrow$“:
Sei A rekursiv aufzählbar mit f. Dann ist A semi-entscheidbar:

input(x);
for $i := 0, 1, 2, \ldots$ **do**
  if $f(i) = x$ **then** output(1); **halt** **fi**

„$\Leftarrow$“: Wir nehmen an $A \subseteq \mathbb{N}$.
Sei A semi-entscheidbar durch (zB) GOTO-Programm P.

Lemma 4.70
Eine Menge A ist rekursiv aufzählbar gdw sie semi-entscheidbar ist.

Beweis:
Der Fall $A = \emptyset$ ist trivial. Sei $A \neq \emptyset$.

„$\Rightarrow$“:
Sei A rekursiv aufzählbar mit f. Dann ist A semi-entscheidbar:

input(x);
for $i := 0, 1, 2, \ldots$ **do**
  if $f(i) = x$ **then** output(1); **halt** **fi**

„$\Leftarrow$“: Wir nehmen an $A \subseteq \mathbb{N}$.
Sei A semi-entscheidbar durch (zB) GOTO-Programm P.
Problem: $P[i]$ muss nicht halten und darf daher nur „zeitbeschränkt“ ausgeführt werden.

Lemma 4.70
Eine Menge A ist rekursiv aufzählbar gdw sie semi-entscheidbar ist.

Beweis:
Der Fall $A = \emptyset$ ist trivial. Sei $A \neq \emptyset$.

„$\Rightarrow$“:
Sei A rekursiv aufzählbar mit f. Dann ist A semi-entscheidbar:

input(x);
for $i := 0, 1, 2, \ldots$ **do**
  if $f(i) = x$ **then** output(1); **halt** **fi**

„$\Leftarrow$“: Wir nehmen an $A \subseteq \mathbb{N}$.
Sei A semi-entscheidbar durch (zB) GOTO-Programm P.
Problem: $P[i]$ muss nicht halten und darf daher nur „zeitbeschränkt“ ausgeführt werden.
Gesucht: Paare (i, j) so dass $P[i]$ nach j Schritten hält.

Lemma 4.70
Eine Menge A ist rekursiv aufzählbar gdw sie semi-entscheidbar ist.

Beweis:
Der Fall $A = \emptyset$ ist trivial. Sei $A \neq \emptyset$.

„$\Rightarrow$“:
Sei A rekursiv aufzählbar mit f. Dann ist A semi-entscheidbar:

input(x);
for $i := 0, 1, 2, \ldots$ **do**
  if $f(i) = x$ **then** output(1); **halt** **fi**

„$\Leftarrow$“: Wir nehmen an $A \subseteq \mathbb{N}$.
Sei A semi-entscheidbar durch (zB) GOTO-Programm P.
Problem: $P[i]$ muss nicht halten und darf daher nur „zeitbeschränkt“ ausgeführt werden.
Gesucht: Paare (i, j) so dass $P[i]$ nach j Schritten hält.
Idee: Bijektion $\mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, dh Umkehrung von c.

$h \mapsto (i)_1$

Beweis (Forts.):
Sei $d \in A$ beliebig.

Beweis (Forts.):

Sei $d \in A$ beliebig.
Folgender Algorithmus berechnet eine Aufzählung von A:

input(n);
if $P[p_1(n)]$ hält nach $p_2(n)$ Schritten **then** output($p_1(n)$)
else output(d) **fi**

Beweis (Forts.):

Sei $d \in A$ beliebig.
Folgender Algorithmus berechnet eine Aufzählung von A:

input(n);
if $P[p_1(n)]$ hält nach $p_2(n)$ Schritten **then** output($p_1(n)$)
else output(d) **fi**

Korrektheit:
Der Algorithmus hält immer und liefert immer ein Element aus A.

Vollständigktheit: Sei $a \in A \subseteq \mathbb{N}$.
Dann hält $P[a]$ nach einer endlichen Zahl k von Schritten.
Dann liefert die Eingabe $n =$ die Ausgabe a. □

Beweis (Forts.):

Sei $d \in A$ beliebig.
Folgender Algorithmus berechnet eine Aufzählung von A:

input(n);
if $P[p_1(n)]$ hält nach $p_2(n)$ Schritten **then** output($p_1(n)$)
else output(d) **fi**

Korrektheit:
Der Algorithmus hält immer und liefert immer ein Element aus A.

Vollständigktheit: Sei $a \in A \subseteq \mathbb{N}$.
Dann hält $P[a]$ nach einer endlichen Zahl k von Schritten.
Dann liefert die Eingabe $n = c(a, k)$ die Ausgabe a. □

Folgende Aussagen sind äquivalent:

- A ist semi-entscheidbar

Folgende Aussagen sind äquivalent:

- A ist semi-entscheidbar
- A ist rekursiv aufzählbar

Satz 4.71
Die Menge $K = \{w \mid M_w[w]\downarrow\}$ ist semi-entscheidbar.

Satz 4.71
Die Menge $K = \{w \mid M_w[w]\downarrow\}$ ist semi-entscheidbar.

Beweis:
Die Funktion χ'_K ist wie folgt Turing-berechenbar:

Satz 4.71
Die Menge $K = \{w \mid M_w[w]\downarrow\}$ ist semi-entscheidbar.

Beweis:
Die Funktion χ'_K ist wie folgt Turing-berechenbar:

Bei Eingabe w simuliere die Ausführung von $M_w[w]$;
gib 1 aus. □

Satz 4.71
Die Menge $K = \{w \mid M_w[w]\downarrow\}$ ist semi-entscheidbar.

Beweis:
Die Funktion χ'_K ist wie folgt Turing-berechenbar:

Bei Eingabe w simuliere die Ausführung von $M_w[w]$;
gib 1 aus. □

- Hier haben wir benutzt, dass man einen Interpreter/Simulator für Turingmaschinen als Turingmaschine programmieren kann.

Satz 4.71
Die Menge $K = \{w \mid M_w[w]\downarrow\}$ ist semi-entscheidbar.

Beweis:
Die Funktion χ'_K ist wie folgt Turing-berechenbar:

Bei Eingabe w simuliere die Ausführung von $M_w[w]$;
gib 1 aus. □

- Hier haben wir benutzt, dass man einen Interpreter/Simulator für Turingmaschinen als Turingmaschine programmieren kann.
- Ein solcher Interpreter wird oft eine Universelle Turingmaschine (U) genannt.

Satz 4.71
Die Menge $K = \{w \mid M_w[w]\downarrow\}$ ist semi-entscheidbar.

Beweis:
Die Funktion χ'_K ist wie folgt Turing-berechenbar:

Bei Eingabe w simuliere die Ausführung von $M_w[w]$;
gib 1 aus. □

- Hier haben wir benutzt, dass man einen Interpreter/Simulator für Turingmaschinen als Turingmaschine programmieren kann.
- Ein solcher Interpreter wird oft eine Universelle Turingmaschine (U) genannt.

Korollar 4.72
$\overline{K}$ ist nicht semi-entscheidbar.

Satz 4.71
Die Menge $K = \{w \mid M_w[w]\downarrow\}$ ist semi-entscheidbar.

Beweis:
Die Funktion χ'_K ist wie folgt Turing-berechenbar:

Bei Eingabe w simuliere die Ausführung von $M_w[w]$;
gib 1 aus. □

- Hier haben wir benutzt, dass man einen Interpreter/Simulator für Turingmaschinen als Turingmaschine programmieren kann.
- Ein solcher Interpreter wird oft eine Universelle Turingmaschine (U) genannt.

Korollar 4.72
$\overline{K}$ ist nicht semi-entscheidbar.

Semi-Entscheidbarkeit ist nicht abgeschlossen unter Komplement.

4.11 Die Sätze von Rice und Shapiro

Die von der TM M_w berechnete Funktion bezeichnen wir mit φ_w.

4.11 Die Sätze von Rice und Shapiro

Die von der TM M_w berechnete Funktion bezeichnen wir mit φ_w.
Wir betrachten implizit nur einstellige Funktionen.

Satz 4.73 (Rice)

Sei F eine Menge berechenbarer Funktionen.

4.11 Die Sätze von Rice und Shapiro

Die von der TM M_w berechnete Funktion bezeichnen wir mit φ_w.
Wir betrachten implizit nur einstellige Funktionen.

Satz 4.73 (Rice)

Sei F eine Menge berechenbarer Funktionen.
Es gelte weder $F = \emptyset$ noch $F =$ alle ber. Funkt.

4.11 Die Sätze von Rice und Shapiro

Die von der TM M_w berechnete Funktion bezeichnen wir mit φ_w.
Wir betrachten implizit nur einstellige Funktionen.

Satz 4.73 (Rice)

Sei F eine Menge berechenbarer Funktionen.
Es gelte weder $F = \emptyset$ noch $F =$ alle ber. Funkt. („F nicht trivial“)
Dann ist unentscheidbar, ob die von einer gegebenen TM M_w berechnete Funktion Element F ist

4.11 Die Sätze von Rice und Shapiro

Die von der TM M_w berechnete Funktion bezeichnen wir mit φ_w.
Wir betrachten implizit nur einstellige Funktionen.

Satz 4.73 (Rice)

Sei F eine Menge berechenbarer Funktionen.
Es gelte weder $F = \emptyset$ noch $F =$ alle ber. Funkt. („F nicht trivial“)
Dann ist unentscheidbar, ob die von einer gegebenen TM M_w berechnete Funktion Element F ist, dh ob $\varphi_w \in F$.

Nicht-triviale semantische Eigenschaften von Programmen sind unentscheidbar.

4.11 Die Sätze von Rice und Shapiro

Die von der TM M_w berechnete Funktion bezeichnen wir mit φ_w.
Wir betrachten implizit nur einstellige Funktionen.

Satz 4.73 (Rice)

Sei F eine Menge berechenbarer Funktionen.
Es gelte weder $F = \emptyset$ noch $F =$ alle ber. Funkt. („F nicht trivial“)
Dann ist unentscheidbar, ob die von einer gegebenen TM M_w berechnete Funktion Element F ist, dh ob $\varphi_w \in F$.

Nicht-triviale semantische Eigenschaften von Programmen sind unentscheidbar.

Beispiel 4.74

Es ist unentscheidbar, ob ein Programm

- irgendwo hält. $(F = \{\varphi_w \mid \exists x.\ M_w[x]\downarrow\})$
- überall hält. $(F = \{\varphi_w \mid \forall x.\ M_w[x]\downarrow\})$

4.11 Die Sätze von Rice und Shapiro

Die von der TM M_w berechnete Funktion bezeichnen wir mit φ_w.
Wir betrachten implizit nur einstellige Funktionen.

Satz 4.73 (Rice)

Sei F eine Menge berechenbarer Funktionen.
Es gelte weder $F = \emptyset$ noch $F =$ alle ber. Funkt. („F nicht trivial“)
Dann ist unentscheidbar, ob die von einer gegebenen TM M_w berechnete Funktion Element F ist, dh ob $\varphi_w \in F$.

Nicht-triviale semantische Eigenschaften von Programmen sind unentscheidbar.

Beispiel 4.74

Es ist unentscheidbar, ob ein Programm

- irgendwo hält. $(F = \{\varphi_w \mid \exists x.\ M_w[x]\downarrow\})$
- überall hält. $(F = \{\varphi_w \mid \forall x.\ M_w[x]\downarrow\})$

- bei Eingabe 42 Ausgabe 42 produziert.

Warnung

Es ist entscheidbar, ob ein Programm

- länger als 5 Zeilen ist.
- eine Zuweisung an die Variable x_{17} enhält.

Beweis:
Wir zeigen $C_F := \{w \in \{0,1\}^* \mid \varphi_w \in F\}$ ist unentscheidbar.

Beweis:
Wir zeigen $C_F := \{w \in \{0,1\}^* \mid \varphi_w \in F\}$ ist unentscheidbar.
Fall 1: $\Omega := (x \mapsto \bot) \notin F$.

Beweis:
Wir zeigen $C_F := \{w \in \{0,1\}^* \mid \varphi_w \in F\}$ ist unentscheidbar.
Fall 1: $\Omega := (x \mapsto \bot) \notin F$.
Wähle $h \in F \neq \emptyset$ beliebig;

Beweis:
Wir zeigen $C_F := \{w \in \{0,1\}^* \mid \varphi_w \in F\}$ ist unentscheidbar.
Fall 1: $\Omega := (x \mapsto \bot) \notin F$.
Wähle $h \in F \neq \emptyset$ beliebig; sei u Kodierung einer TM mit $\varphi_u = h$.

Beweis:
Wir zeigen $C_F := \{w \in \{0,1\}^* \mid \varphi_w \in F\}$ ist unentscheidbar.
Fall 1: $\Omega := (x \mapsto \bot) \notin F$.
Wähle $h \in F \neq \emptyset$ beliebig; sei u Kodierung einer TM mit $\varphi_u = h$.
Reduziere K auf C_F

Beweis:
Wir zeigen $C_F := \{w \in \{0,1\}^* \mid \varphi_w \in F\}$ ist unentscheidbar.
Fall 1: $\Omega := (x \mapsto \bot) \notin F$.
Wähle $h \in F \neq \emptyset$ beliebig; sei u Kodierung einer TM mit $\varphi_u = h$.
Reduziere K auf C_F ($K \leq C_F$) mit $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$:

Beweis:
Wir zeigen $C_F := \{w \in \{0,1\}^* \mid \varphi_w \in F\}$ ist unentscheidbar.
Fall 1: $\Omega := (x \mapsto \bot) \notin F$.
Wähle $h \in F \neq \emptyset$ beliebig; sei u Kodierung einer TM mit $\varphi_u = h$.
Reduziere K auf C_F ($K \leq C_F$) mit $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$:
$f(w)$ ist die Kodierung folgender TM:

> Speichere die Eingabe x auf einem getrennten Band;
> schreibe $w\#w$ auf die Eingabe und führe U aus;
> führe M_u auf x aus.

Beweis:
Wir zeigen $C_F := \{w \in \{0,1\}^* \mid \varphi_w \in F\}$ ist unentscheidbar.
Fall 1: $\Omega := (x \mapsto \bot) \notin F$.
Wähle $h \in F \neq \emptyset$ beliebig; sei u Kodierung einer TM mit $\varphi_u = h$.
Reduziere K auf C_F ($K \leq C_F$) mit $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$:
$f(w)$ ist die Kodierung folgender TM:

> Speichere die Eingabe x auf einem getrennten Band;
> schreibe $w\#w$ auf die Eingabe und führe U aus;
> führe M_u auf x aus.

Damit gilt $\varphi_{f(w)} = \begin{cases} h & \text{falls } M_w[w]\downarrow \\ \Omega & \text{sonst} \end{cases}$ $\in F$ $\notin F$

Beweis:
Wir zeigen $C_F := \{w \in \{0,1\}^* \mid \varphi_w \in F\}$ ist unentscheidbar.
Fall 1: $\Omega := (x \mapsto \bot) \notin F$.
Wähle $h \in F \neq \emptyset$ beliebig; sei u Kodierung einer TM mit $\varphi_u = h$.
Reduziere K auf C_F ($K \leq C_F$) mit $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$:
$f(w)$ ist die Kodierung folgender TM:

Speichere die Eingabe x auf einem getrennten Band;
schreibe $w\#w$ auf die Eingabe und führe U aus;
führe M_u auf x aus.

Damit gilt $\varphi_{f(w)} = \begin{cases} h & \text{falls } M_w[w]\downarrow \\ \Omega & \text{sonst} \end{cases}$ und damit

$$w \in K \;\Leftrightarrow\; M_w[w]\downarrow \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \varphi_{f(w)} \in F \;\Leftrightarrow\; f(w) \in C_F$$

Satz 4.75 (Rice-Shapiro)

Sei F eine Menge berechenbarer Funktionen.

Beweis:
Wir zeigen $C_F := \{w \in \{0,1\}^* \mid \varphi_w \in F\}$ ist unentscheidbar.
Fall 1: $\Omega := (x \mapsto \bot) \notin F$.
Wähle $h \in F \neq \emptyset$ beliebig; sei u Kodierung einer TM mit $\varphi_u = h$.
Reduziere K auf C_F ($K \leq C_F$) mit $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$:
$f(w)$ ist die Kodierung folgender TM:

Speichere die Eingabe x auf einem getrennten Band;
schreibe $w\#w$ auf die Eingabe und führe U aus;
führe M_u auf x aus.

Damit gilt $\varphi_{f(w)} = \begin{cases} h & \text{falls } M_w[w]\downarrow \\ \Omega & \text{sonst} \end{cases}$ und damit

$$w \in K \;\Leftrightarrow\; M_w[w]\downarrow \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \varphi_{f(w)} \in F \;\Leftrightarrow\; f(w) \in C_F$$

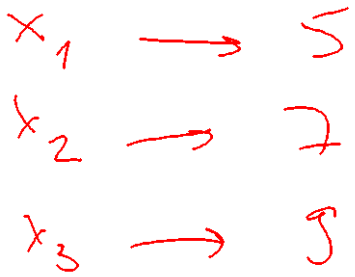
$$(*) : \begin{cases} M_w[w]\downarrow \Rightarrow \\ \\ \end{cases}$$

Satz 4.75 (Rice-Shapiro)

Sei F eine Menge berechenbarer Funktionen.
Ist $C_F := \{w \mid \varphi_w \in F\}$ semi-entscheidbar,

Satz 4.75 (Rice-Shapiro)

Sei F eine Menge berechenbarer Funktionen.
Ist $C_F := \{w \mid \varphi_w \in F\}$ semi-entscheidbar,
so gilt für alle berechenbaren f:
$f \in F \Leftrightarrow$ es gibt eine endliche Teilfunktion $g \subseteq f$ mit $g \in F$.



Satz 4.75 (Rice-Shapiro)

Sei F eine Menge berechenbarer Funktionen.
Ist $C_F := \{w \mid \varphi_w \in F\}$ semi-entscheidbar,
so gilt für alle berechenbaren f:
$f \in F \Leftrightarrow$ es gibt eine endliche Teilfunktion $g \subseteq f$ mit $g \in F$.

Beweis:
„$\Rightarrow$“ mit Widerspruch.

Satz 4.75 (Rice-Shapiro)

Sei F eine Menge berechenbarer Funktionen.
Ist $C_F := \{w \mid \varphi_w \in F\}$ semi-entscheidbar,
so gilt für alle berechenbaren f:
$f \in F \Leftrightarrow$ es gibt eine endliche Teilfunktion $g \subseteq f$ mit $g \in F$.

Beweis:
„$\Rightarrow$“ mit Widerspruch.
Sei $f \in F$, so dass für alle endlichen $g \subseteq f$ gilt $g \notin F$.

Satz 4.75 (Rice-Shapiro)

Sei F eine Menge berechenbarer Funktionen.
Ist $C_F := \{w \mid \varphi_w \in F\}$ semi-entscheidbar,
so gilt für alle berechenbaren f:
$f \in F \Leftrightarrow$ es gibt eine endliche Teilfunktion $g \subseteq f$ mit $g \in F$.

Beweis:
„$\Rightarrow$“ mit Widerspruch.
Sei $f \in F$, so dass für alle endlichen $g \subseteq f$ gilt $g \notin F$.
Wir zeigen $\overline{K} \leq C_F$ womit C_F nicht semi-entscheidbar ist.

Beweis (Forts.):

Reduktion $\overline{K} \leq C_F$ mit $h : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$:

Beweis (Forts.):

Reduktion $\overline{K} \leq C_F$ mit $h : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$:
$h(w)$ ist die Kodierung folgender TM:

> Bei Eingabe t simuliere t Schritte von $M_w[w]$.
> Hält diese Berechnung in $\leq t$ Schritten, gehe in eine endlos Schleife, sonst berechne $f(t)$.

Beweis (Forts.):

Reduktion $\overline{K} \leq C_F$ mit $h : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$:
$h(w)$ ist die Kodierung folgender TM:

> Bei Eingabe t simuliere t Schritte von $M_w[w]$.
> Hält diese Berechnung in $\leq t$ Schritten, gehe in eine endlos Schleife, sonst berechne $f(t)$.

Wir zeigen

$$w \in \overline{K} \;\Leftrightarrow\; h(w) \in C_F$$

Beweis (Forts.):

Reduktion $\overline{K} \leq C_F$ mit $h : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$:
$h(w)$ ist die Kodierung folgender TM:

> Bei Eingabe t simuliere t Schritte von $M_w[w]$.
> Hält diese Berechnung in $\leq t$ Schritten, gehe in eine endlos Schleife, sonst berechne $f(t)$.

Wir zeigen

$$w \in \overline{K} \;\Leftrightarrow\; h(w) \in C_F$$

- $w \in \overline{K} \implies \neg M_w[w]\downarrow$

Beweis (Forts.):

Reduktion $\overline{K} \leq C_F$ mit $h : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$:
$h(w)$ ist die Kodierung folgender TM:

Bei Eingabe t simuliere t Schritte von $M_w[w]$.
Hält diese Berechnung in $\leq t$ Schritten, gehe in eine endlos Schleife, sonst berechne $f(t)$.

Wir zeigen

$$w \in \overline{K} \;\Leftrightarrow\; h(w) \in C_F$$

- $w \in \overline{K} \implies \neg M_w[w]{\downarrow} \implies \varphi_{h(w)} = f \in F \implies h(w) \in C_F$
- Falls $w \notin \overline{K}$ dann hält $M_w[w]$ nach t Schritten.

Beweis (Forts.):

Reduktion $\overline{K} \leq C_F$ mit $h : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$:
$h(w)$ ist die Kodierung folgender TM:

Bei Eingabe t simuliere t Schritte von $M_w[w]$.
Hält diese Berechnung in $\leq t$ Schritten, gehe in eine endlos Schleife, sonst berechne $f(t)$.

Wir zeigen

$$w \in \overline{K} \;\Leftrightarrow\; h(w) \in C_F$$

- $w \in \overline{K} \implies \neg M_w[w]{\downarrow} \implies \varphi_{h(w)} = f \in F \implies h(w) \in C_F$

- Falls $w \notin \overline{K}$ dann hält $M_w[w]$ nach t Schritten.
  Damit gilt: $\varphi_{h(w)}$ ist f eingeschränkt auf $\{0, \ldots, t-1\}$.

Beweis (Forts.):

Reduktion $\overline{K} \leq C_F$ mit $h : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$:
$h(w)$ ist die Kodierung folgender TM:

Bei Eingabe t simuliere t Schritte von $M_w[w]$.
Hält diese Berechnung in $\leq t$ Schritten, gehe in eine endlos Schleife, sonst berechne $f(t)$.

Wir zeigen

$$w \in \overline{K} \;\Leftrightarrow\; h(w) \in C_F$$

- $w \in \overline{K} \implies \neg M_w[w]{\downarrow} \implies \varphi_{h(w)} = f \in F \implies h(w) \in C_F$
- Falls $w \notin \overline{K}$ dann hält $M_w[w]$ nach t Schritten.
  Damit gilt: $\varphi_{h(w)}$ ist f eingeschränkt auf $\{0, \ldots, t-1\}$.

Nach Annahme folgt $\varphi_{h(w)} \notin F$

Beweis (Forts.):

Reduktion $\overline{K} \leq C_F$ mit $h : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$:
$h(w)$ ist die Kodierung folgender TM:

Bei Eingabe t simuliere t Schritte von $M_w[w]$.
Hält diese Berechnung in $\leq t$ Schritten, gehe in eine endlos Schleife, sonst berechne $f(t)$.

Wir zeigen

$$w \in \overline{K} \;\Leftrightarrow\; h(w) \in C_F$$

- $w \in \overline{K} \implies \neg M_w[w]{\downarrow} \implies \varphi_{h(w)} = f \in F \implies h(w) \in C_F$
- Falls $w \notin \overline{K}$ dann hält $M_w[w]$ nach t Schritten.
  Damit gilt: $\varphi_{h(w)}$ ist f eingeschränkt auf $\{0, \ldots, t-1\}$.
  Nach Annahme folgt $\varphi_{h(w)} \notin F$, dh $h(w) \notin C_F$.

Beweis (Forts.):

Reduktion $\overline{K} \leq C_F$ mit $h : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$:

Beweis (Forts.):

„$\Leftarrow$“ mit Widerspruch.
Sei f berechenbar, sei $g \subseteq f$ endlich mit $g \in F$, aber sei $f \notin F$.
Wir zeigen $\overline{K} \leq C_F$ womit C_F nicht semi-entscheidbar ist.

Beweis (Forts.):

„$\Leftarrow$“ mit Widerspruch.
Sei f berechenbar, sei $g \subseteq f$ endlich mit $g \in F$, aber sei $f \notin F$.
Wir zeigen $\overline{K} \leq C_F$ womit C_F nicht semi-entscheidbar ist. ↯
Reduktion $\overline{K} \leq C_F$ mit $h : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$:
$h(w)$ ist die Kodierung folgender TM:

Beweis (Forts.):

„$\Leftarrow$“ mit Widerspruch.
Sei f berechenbar, sei $g \subseteq f$ endlich mit $g \in F$, aber sei $f \notin F$.
Wir zeigen $\overline{K} \leq C_F$ womit C_F nicht semi-entscheidbar ist. ↯
Reduktion $\overline{K} \leq C_F$ mit $h : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$:
$h(w)$ ist die Kodierung folgender TM:

Bei Eingabe t, teste ob t im *endlichen* Def.ber. von g ist.
Wenn ja, berechne $f(t)$,
sonst simuliere $M_w[w]$ und berechne dann $f(t)$.

Beweis (Forts.):

„⇐“ mit Widerspruch.
Sei f berechenbar, sei $g \subseteq f$ endlich mit $g \in F$, aber sei $f \notin F$.
Wir zeigen $\overline{K} \leq C_F$ womit C_F nicht semi-entscheidbar ist. ↯
Reduktion $\overline{K} \leq C_F$ mit $h : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$:
$h(w)$ ist die Kodierung folgender TM:

Bei Eingabe t, teste ob t im *endlichen* Def.ber. von g ist.
Wenn ja, berechne $f(t)$,
sonst simuliere $M_w[w]$ und berechne dann $f(t)$.

Wir zeigen

$$w \in \overline{K} \;\Leftrightarrow\; h(w) \in C_F$$

Beweis (Forts.):

„⇐“ mit Widerspruch.
Sei f berechenbar, sei $g \subseteq f$ endlich mit $g \in F$, aber sei $f \notin F$.
Wir zeigen $\overline{K} \leq C_F$ womit C_F nicht semi-entscheidbar ist. ↯
Reduktion $\overline{K} \leq C_F$ mit $h : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$:
$h(w)$ ist die Kodierung folgender TM:

Bei Eingabe t, teste ob t im *endlichen* Def.ber. von g ist.
Wenn ja, berechne $f(t)$,
sonst simuliere $M_w[w]$ und berechne dann $f(t)$.

Wir zeigen

$$w \in \overline{K} \;\Leftrightarrow\; h(w) \in C_F$$

- $w \in \overline{K} \implies \neg M_w[w]{\downarrow}$

Beweis (Forts.):

„⇐“ mit Widerspruch.
Sei f berechenbar, sei $g \subseteq f$ endlich mit $g \in F$, aber sei $f \notin F$.
Wir zeigen $\overline{K} \leq C_F$ womit C_F nicht semi-entscheidbar ist. ↯
Reduktion $\overline{K} \leq C_F$ mit $h : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$:
$h(w)$ ist die Kodierung folgender TM:

Bei Eingabe t, teste ob t im *endlichen* Def.ber. von g ist.
Wenn ja, berechne $f(t)$,
sonst simuliere $M_w[w]$ und berechne dann $f(t)$.

Wir zeigen

$$w \in \overline{K} \;\Leftrightarrow\; h(w) \in C_F$$

- $w \in \overline{K} \implies \neg M_w[w]{\downarrow} \implies \varphi_{h(w)} = g \in F \implies h(w) \in C_F$
- $w \notin \overline{K} \implies M_w[w]{\downarrow}$

Beweis (Forts.):

„⇐“ mit Widerspruch.
Sei f berechenbar, sei $g \subseteq f$ endlich mit $g \in F$, aber sei $f \notin F$.
Wir zeigen $\overline{K} \leq C_F$ womit C_F nicht semi-entscheidbar ist. ↯
Reduktion $\overline{K} \leq C_F$ mit $h : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$:
$h(w)$ ist die Kodierung folgender TM:

Bei Eingabe t, teste ob t im *endlichen* Def.ber. von g ist.
Wenn ja, berechne $f(t)$,
sonst simuliere $M_w[w]$ und berechne dann $f(t)$.

Wir zeigen

$$w \in \overline{K} \;\Leftrightarrow\; h(w) \in C_F$$

- $w \in \overline{K} \implies \neg M_w[w]{\downarrow} \implies \varphi_{h(w)} = g \in F \implies h(w) \in C_F$
- $w \notin \overline{K} \implies M_w[w]{\downarrow} \implies \varphi_{h(w)} = f \notin F \implies h(w) \notin C_F$

□

Rice-Shapiro (in Kurzform): $C_F := \{w \mid \varphi_w \in F\}$ s-e $\Longrightarrow$

Rice-Shapiro (in Kurzform): $C_F := \{w \mid \varphi_w \in F\}$ s-e $\Longrightarrow$

$f \in F \Leftrightarrow$ es gibt endliche Funkt. $g \subseteq f$ mit $g \in F$.

Rice-Shapiro (in Kurzform): $C_F := \{w \mid \varphi_w \in F\}$ s-e $\Longrightarrow$

$f \in F \Leftrightarrow$ es gibt endliche Funkt. $g \subseteq f$ mit $g \in F$.

Ein Programm heißt terminierend gdw es für alle Eingaben hält.

Korollar 4.76

- *Die Menge der terminierenden Programme ist nicht semi-entscheidbar.*

Rice-Shapiro (in Kurzform): $C_F := \{w \mid \varphi_w \in F\}$ s-e $\Longrightarrow$

$f \in F \Leftrightarrow$ es gibt endliche Funkt. $g \subseteq f$ mit $g \in F$.

Ein Programm heißt terminierend gdw es für alle Eingaben hält.

Korollar 4.76

- *Die Menge der terminierenden Programme ist nicht semi-entscheidbar.*
- *Die Menge der nicht-terminierenden Programme ist nicht semi-entscheidbar.*

Rice-Shapiro (in Kurzform): $C_F := \{w \mid \varphi_w \in F\}$ s-e $\Longrightarrow$

$f \in F \Leftrightarrow$ es gibt endliche Funkt. $g \subseteq f$ mit $g \in F$.

Ein Programm heißt terminierend gdw es für alle Eingaben hält.

Korollar 4.76

- *Die Menge der terminierenden Programme ist nicht semi-entscheidbar.*
- *Die Menge der nicht-terminierenden Programme ist nicht semi-entscheidbar.*

Beweis:

- $F :=$ Menge aller berechenbaren totalen Funktionen.

Rice-Shapiro (in Kurzform): $C_F := \{w \mid \varphi_w \in F\}$ s-e $\Longrightarrow$

$f \in F \Leftrightarrow$ es gibt endliche Funkt. $g \subseteq f$ mit $g \in F$.

Ein Programm heißt terminierend gdw es für alle Eingaben hält.

Korollar 4.76

- *Die Menge der terminierenden Programme ist nicht semi-entscheidbar.*
- *Die Menge der nicht-terminierenden Programme ist nicht semi-entscheidbar.*

Beweis:

- $F :=$ Menge aller berechenbaren totalen Funktionen.
  Sei $f \in F$. Jede endliche $g \subseteq f$ ist echt partiell, dh $g \notin F$.
  Also kann C_F nicht semi-entscheidbar sein.
- $F :=$ Menge aller berechenbaren nicht-totalen Funktionen.

Rice-Shapiro (in Kurzform): $C_F := \{w \mid \varphi_w \in F\}$ s-e $\Longrightarrow$

$f \in F \Leftrightarrow$ es gibt endliche Funkt. $g \subseteq f$ mit $g \in F$.

Ein Programm heißt terminierend gdw es für alle Eingaben hält.

Korollar 4.76

- *Die Menge der terminierenden Programme ist nicht semi-entscheidbar.*
- *Die Menge der nicht-terminierenden Programme ist nicht semi-entscheidbar.*

Beweis:

- $F :=$ Menge aller berechenbaren totalen Funktionen.
  Sei $f \in F$. Jede endliche $g \subseteq f$ ist echt partiell, dh $g \notin F$.
  Also kann C_F nicht semi-entscheidbar sein.
- $F :=$ Menge aller berechenbaren nicht-totalen Funktionen.
  Sei f total und berechenbar. Damit $f \notin F$.

Rice-Shapiro (in Kurzform): $C_F := \{w \mid \varphi_w \in F\}$ s-e $\Longrightarrow$

$f \in F \Leftrightarrow$ es gibt endliche Funkt. $g \subseteq f$ mit $g \in F$.

Ein Programm heißt terminierend gdw es für alle Eingaben hält.

Korollar 4.76

- *Die Menge der terminierenden Programme ist nicht semi-entscheidbar.*
- *Die Menge der nicht-terminierenden Programme ist nicht semi-entscheidbar.*

Beweis:

- $F :=$ Menge aller berechenbaren totalen Funktionen.
  Sei $f \in F$. Jede endliche $g \subseteq f$ ist echt partiell, dh $g \notin F$.
  Also kann C_F nicht semi-entscheidbar sein.
- $F :=$ Menge aller berechenbaren nicht-totalen Funktionen.
  Sei f total und berechenbar. Damit $f \notin F$.
  Aber jede endliche $g \subseteq f$ ist in F.

Grenzen automatischer Terminationsanalyse von Programmen

- Termination ist unentscheidbar (Rice):

Grenzen automatischer Terminationsanalyse von Programmen

- Termination ist unentscheidbar (Rice):
  Klare Ja/Nein Antwort unmöglich.
- Termination ist nicht semi-entscheidbar (Rice-Shapiro):

Grenzen automatischer Terminationsanalyse von Programmen

- Termination ist unentscheidbar (Rice):
  Klare Ja/Nein Antwort unmöglich.
- Termination ist nicht semi-entscheidbar (Rice-Shapiro):
  Es gibt kein Zertifizierungs-Programm,
  das alle terminierenden Programme erkennt.

Grenzen automatischer Terminationsanalyse von Programmen

- Termination ist unentscheidbar (Rice):
  Klare Ja/Nein Antwort unmöglich.
- Termination ist nicht semi-entscheidbar (Rice-Shapiro):
  Es gibt kein Zertifizierungs-Programm,
  das alle terminierenden Programme erkennt.
- Nicht-Termination ist nicht semi-entscheidbar (Rice-Shapiro):

Grenzen automatischer Terminationsanalyse von Programmen

- Termination ist unentscheidbar (Rice):
  Klare Ja/Nein Antwort unmöglich.
- Termination ist nicht semi-entscheidbar (Rice-Shapiro):
  Es gibt kein Zertifizierungs-Programm,
  das alle terminierenden Programme erkennt.
- Nicht-Termination ist nicht semi-entscheidbar (Rice-Shapiro):
  Es gibt keinen perfekten *Bug Finder*,
  der alle nicht-terminierenden Programme erkennt.

Grenzen automatischer Terminationsanalyse von Programmen

- Termination ist unentscheidbar (Rice):
  Klare Ja/Nein Antwort unmöglich.
- Termination ist nicht semi-entscheidbar (Rice-Shapiro):
  Es gibt kein Zertifizierungs-Programm,
  das alle terminierenden Programme erkennt.
- Nicht-Termination ist nicht semi-entscheidbar (Rice-Shapiro):
  Es gibt keinen perfekten *Bug Finder*,
  der alle nicht-terminierenden Programme erkennt.

Aber es gibt mächtige heuristische Verfahren, die für
relativ viele Programme aus der Praxis (Gerätetreiber)

- Termination beweisen können, oder
- Gegenbeispiele finden können.

4.12 Das Postsche Korrespondenzproblem

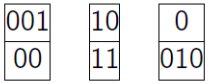
4.12 Das Postsche Korrespondenzproblem

Gegeben beliebig viele Kopien der 3 „Spielkarten“

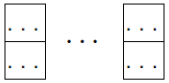
001	10	0
00	11	010

4.12 Das Postsche Korrespondenzproblem

Gegeben beliebig viele Kopien der 3 „Spielkarten“



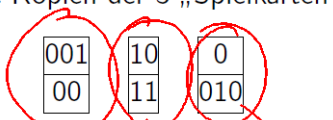
gibt es dann eine Folge dieser Karten



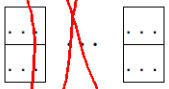
so dass oben und unten das gleiche Wort steht?

4.12 Das Postsche Korrespondenzproblem

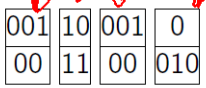
Gegeben beliebig viele Kopien der 3 „Spielkarten“



gibt es dann eine Folge dieser Karten



so dass oben und unten das gleiche Wort steht?



Kurz: 1,2,1,3.

Definition 4.77 (Postsche Korrespondenzproblem, *Post's Correspondence Problem*, PCP)

Gegeben: Eine endliche Folge $(x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k)$, wobei $x_i, y_i \in \Sigma^+$.

Definition 4.77 (Postsche Korrespondenzproblem, *Post's Correspondence Problem*, PCP)

Gegeben: Eine endliche Folge $(x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k)$, wobei $x_i, y_i \in \Sigma^+$.

Problem: Gibt es eine Folge von Indizes $i_1, \ldots, i_n \in \{1, \ldots, k\}$, $n > 0$, mit $x_{i_1} \ldots x_{i_n} = y_{i_1} \ldots y_{i_n}$?

Definition 4.77 (Postsche Korrespondenzproblem, *Post's Correspondence Problem*, PCP)

Gegeben: Eine endliche Folge $(x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k)$, wobei $x_i, y_i \in \Sigma^+$.

Problem: Gibt es eine Folge von Indizes $i_1, \ldots, i_n \in \{1, \ldots, k\}$, $n > 0$, mit $x_{i_1} \ldots x_{i_n} = y_{i_1} \ldots y_{i_n}$?

Dann nennen wir $i_1, \ldots, i_n$ eine Lösung des Problems $(x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k)$.

Definition 4.77 (Postsche Korrespondenzproblem, *Post's Correspondence Problem*, PCP)

Gegeben: Eine endliche Folge $(x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k)$, wobei $x_i, y_i \in \Sigma^+$.

Problem: Gibt es eine Folge von Indizes $i_1, \ldots, i_n \in \{1, \ldots, k\}$, $n > 0$, mit $x_{i_1} \ldots x_{i_n} = y_{i_1} \ldots y_{i_n}$?

Dann nennen wir $i_1, \ldots, i_n$ eine Lösung des Problems $(x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k)$.

Beispiel 4.78

- Hat $(1, 111), (10111, 10), (10, 0)$ eine Lösung? 2,1,1,3