

Title: Seidl: Theoretische_Informatik
(10.06.2013)

Date: Mon Jun 10 10:16:10 CEST 2013

Duration: 78:51 min

Pages: 76

Satz 3.57 (PDA \rightarrow CFG)

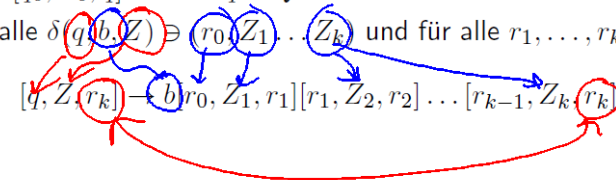
Zu jedem PDA $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta)$, der mit leerem Keller akzeptiert, kann man eine CFG G konstruieren mit $L(G) = L_\epsilon(M)$.

Konstruktion: $G := (V, \Sigma, P, S)$ mit

$V := Q \times \Gamma \times Q \cup \{S\}$ wobei wir die Tripel mit $[\cdot, \cdot, \cdot]$ notieren

und P die folgenden Produktionen enthält:

- $S \rightarrow [q_0, Z_0, q]$ für alle $q \in Q$
- Für alle $\delta(q, b, Z) \ni (r_0, Z_1 \dots Z_k)$ und für alle $r_1, \dots, r_k \in Q$:



Satz 3.57 (PDA \rightarrow CFG)

Zu jedem PDA $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta)$, der mit leerem Keller akzeptiert, kann man eine CFG G konstruieren mit $L(G) = L_\epsilon(M)$.

Konstruktion: $G := (V, \Sigma, P, S)$ mit

$V := Q \times \Gamma \times Q \cup \{S\}$ wobei wir die Tripel mit $[\cdot, \cdot, \cdot]$ notieren

und P die folgenden Produktionen enthält:

- $S \rightarrow [q_0, Z_0, q]$ für alle $q \in Q$
- Für alle $\delta(q, b, Z) \ni (r_0, Z_1 \dots Z_k)$ und für alle $r_1, \dots, r_k \in Q$:

$$[q, Z, r_k] \rightarrow b[r_0, Z_1, r_1][r_1, Z_2, r_2] \dots [r_{k-1}, Z_k, r_k]$$

Idee: $[q, Z, r_k] \rightarrow_G^* w$ gdw $(q, w, Z) \rightarrow_M^* (r_k, \epsilon, \epsilon)$

Lemma 3.58

$[q, Z, p] \rightarrow_G^n w$ gdw $(q, w, Z) \rightarrow_M^n (p, \epsilon, \epsilon)$

Lemma 3.58

$$[q, Z, p] \rightarrow_G^n w \text{ gdw } (q, w, Z) \rightarrow_M^n (p, \epsilon, \epsilon)$$

Beweis:

„ \Rightarrow “: Mit Induktion über n .

Lemma 3.58

$$[q, Z, p] \rightarrow_G^n w \text{ gdw } (q, w, Z) \rightarrow_M^n (p, \epsilon, \epsilon)$$

Beweis:

„ \Rightarrow “: Mit Induktion über n .

IA: Beh. gilt für alle Werte $< n$.

Lemma 3.58

$$[q, Z, p] \rightarrow_G^n w \text{ gdw } (q, w, Z) \rightarrow_M^n (p, \epsilon, \epsilon)$$

Beweis:

„ \Rightarrow “: Mit Induktion über n .

IA: Beh. gilt für alle Werte $< n$. Zz: Beh. gilt für n .

Die Ableitung $[q, Z, p] \rightarrow_G^n w$ muss von folgender Form sein:

$$[q, Z, r_k] \rightarrow_G b[r_0, Z_1, r_1] \dots [r_{k-1}, Z_k, r_k]$$

Lemma 3.58

$$[q, Z, p] \rightarrow_G^n w \text{ gdw } (q, w, Z) \rightarrow_M^n (p, \epsilon, \epsilon)$$

Beweis:

„ \Rightarrow “: Mit Induktion über n .

IA: Beh. gilt für alle Werte $< n$. Zz: Beh. gilt für n .

Die Ableitung $[q, Z, p] \rightarrow_G^n w$ muss von folgender Form sein:

$$\begin{aligned} [q, Z, r_k] &\rightarrow_G b[r_0, Z_1, r_1] \dots [r_{k-1}, Z_k, r_k] \\ &\rightarrow_G^{n-1} bu_1 \dots u_k = w \end{aligned}$$

$r_k = p$

Lemma 3.58

$$[q, Z, p] \rightarrow_G^n w \text{ gdw } (q, w, Z) \rightarrow_M^n (p, \epsilon, \epsilon)$$

Beweis:

„ \Rightarrow “: Mit Induktion über n .

IA: Beh. gilt für alle Werte $< n$. Zz: Beh. gilt für n .

Die Ableitung $[q, Z, p] \rightarrow_G^n w$ muss von folgender Form sein:

$$\begin{array}{l} [q, Z, r_k] \rightarrow_G b[r_0, Z_1, r_1] \dots [r_{k-1}, Z_k, r_k] \\ \rightarrow_G^{n-1} bu_1 \dots u_k = w \end{array}$$

mit $r_k = p, (r_0, Z_1 \dots Z_k) \in \delta(q, b, Z)$,

Lemma 3.58

$$[q, Z, p] \rightarrow_G^n w \text{ gdw } (q, w, Z) \rightarrow_M^n (p, \epsilon, \epsilon)$$

Beweis:

„ \Rightarrow “: Mit Induktion über n .

IA: Beh. gilt für alle Werte $< n$. Zz: Beh. gilt für n .

Die Ableitung $[q, Z, p] \rightarrow_G^n w$ muss von folgender Form sein:

$$\begin{array}{l} [q, Z, r_k] \rightarrow_G b[r_0, Z_1, r_1] \dots [r_{k-1}, Z_k, r_k] \\ \rightarrow_G^{n-1} bu_1 \dots u_k = w \end{array}$$

mit $r_k = p, (r_0, Z_1 \dots Z_k) \in \delta(q, b, Z)$,

$[r_{i-1}, Z_i, r_i] \rightarrow_G^{n_i} u_i$ ($i = 1, \dots, k$) und $\sum n_i = n - 1$.

Lemma 3.58

$$[q, Z, p] \rightarrow_G^n w \text{ gdw } (q, w, Z) \rightarrow_M^n (p, \epsilon, \epsilon)$$

Beweis:

„ \Rightarrow “: Mit Induktion über n .

IA: Beh. gilt für alle Werte $< n$. Zz: Beh. gilt für n .

Die Ableitung $[q, Z, p] \rightarrow_G^n w$ muss von folgender Form sein:

$$\begin{array}{l} [q, Z, r_k] \rightarrow_G b[r_0, Z_1, r_1] \dots [r_{k-1}, Z_k, r_k] \\ \rightarrow_G^{n-1} bu_1 \dots u_k = w \end{array}$$

mit $r_k = p, (r_0, Z_1 \dots Z_k) \in \delta(q, b, Z)$,

$[r_{i-1}, Z_i, r_i] \rightarrow_G^{n_i} u_i$ ($i = 1, \dots, k$) und $\sum n_i = n - 1$.

IA $\Rightarrow (r_{i-1}, u_i, Z_i) \rightarrow_M^{n_i} (r_i, \epsilon, \epsilon)$

Lemma 3.58

$$[q, Z, p] \rightarrow_G^n w \text{ gdw } (q, w, Z) \rightarrow_M^n (p, \epsilon, \epsilon)$$

Beweis:

„ \Rightarrow “: Mit Induktion über n .

IA: Beh. gilt für alle Werte $< n$. Zz: Beh. gilt für n .

Die Ableitung $[q, Z, p] \rightarrow_G^n w$ muss von folgender Form sein:

$$\begin{array}{l} [q, Z, r_k] \rightarrow_G b[r_0, Z_1, r_1] \dots [r_{k-1}, Z_k, r_k] \\ \rightarrow_G^{n-1} bu_1 \dots u_k = w \end{array}$$

mit $r_k = p, (r_0, Z_1 \dots Z_k) \in \delta(q, b, Z)$,

$[r_{i-1}, Z_i, r_i] \rightarrow_G^{n_i} u_i$ ($i = 1, \dots, k$) und $\sum n_i = n - 1$.

IA $\Rightarrow (r_{i-1}, u_i, Z_i) \rightarrow_M^{n_i} (r_i, \epsilon, \epsilon)$

Erweiterungslemma

$$\Rightarrow (r_{i-1}, u_i \dots u_k, Z_i \dots Z_k) \rightarrow_M^{n_i} (r_i, u_{i+1} \dots u_k, Z_{i+1} \dots Z_k)$$

Lemma 3.58

$$[q, Z, p] \rightarrow_G^n w \text{ gdw } (q, w, Z) \rightarrow_M^n (p, \epsilon, \epsilon)$$

Beweis:

„ \Rightarrow “: Mit Induktion über n .

IA: Beh. gilt für alle Werte $< n$. Zz: Beh. gilt für n .

Die Ableitung $[q, Z, p] \rightarrow_G^n w$ muss von folgender Form sein:

$$\begin{array}{l} [q, Z, r_k] \rightarrow_G b[r_0, Z_1, r_1] \dots [r_{k-1}, Z_k, r_k] \\ \rightarrow_G^{n-1} bu_1 \dots u_k = w \end{array}$$

mit $r_k = p$, $(r_0, Z_1 \dots Z_k) \in \delta(q, b, Z)$,

$[r_{i-1}, Z_i, r_i] \rightarrow_G^{n_i} u_i$ ($i = 1, \dots, k$) und $\sum n_i = n - 1$.

IA $\Rightarrow (r_{i-1}, u_i, Z_i) \rightarrow_M^{n_i} (r_i, \epsilon, \epsilon)$

Erweiterungslemma

$\Rightarrow (r_{i-1}, u_i \dots u_k, Z_i \dots Z_k) \rightarrow_M^{n_i} (r_i, u_{i+1} \dots u_k, Z_{i+1} \dots Z_k)$

$\Rightarrow (q, w, Z) \rightarrow_M (r_0, u_1 \dots u_k, Z_1 \dots Z_k) \rightarrow_M^{n-1} (r_k, \epsilon, \epsilon) \quad \square$

Beweis (Forts.):

„ $[q, Z, p] \rightarrow_G^n w \Leftarrow (q, w, Z) \rightarrow_M^n (p, \epsilon, \epsilon)$ “: Mit Induktion über n .

Beweis (Forts.):

„ $[q, Z, p] \rightarrow_G^n w \Leftarrow (q, w, Z) \rightarrow_M^n (p, \epsilon, \epsilon)$ “: Mit Induktion über n .

IA: Beh. gilt für alle Werte $< n$.

Beweis (Forts.):

„ $[q, Z, p] \rightarrow_G^n w \Leftarrow (q, w, Z) \rightarrow_M^n (p, \epsilon, \epsilon)$ “: Mit Induktion über n .

IA: Beh. gilt für alle Werte $< n$. Zz: Beh. gilt für n .

Die Berechnung $(q, w, Z) \rightarrow_M^n (p, \epsilon, \epsilon)$ muss von dieser Form sein:

$$(q, w, Z) \rightarrow_M (r_0, w', Z_1 \dots Z_k) \rightarrow_M^{n-1} (p, \epsilon, \epsilon)$$

Beweis (Forts.):

„ $[q, Z, p] \rightarrow_G^n w \Leftarrow (q, w, Z) \rightarrow_M^n (p, \epsilon, \epsilon)$ “: Mit Induktion über n .

IA: Beh. gilt für alle Werte $< n$. Zz: Beh. gilt für n .

Die Berechnung $(q, w, Z) \rightarrow_M^n (p, \epsilon, \epsilon)$ muss von dieser Form sein:

$$(q, w, Z) \rightarrow_M (r_0, w', Z_1 \dots Z_k) \rightarrow_M^{n-1} (p, \epsilon, \epsilon)$$

mit $w = bw'$, $(r_0, Z_1 \dots Z_k) \in \delta(q, b, Z)$.

Beweis (Forts.):

„ $[q, Z, p] \rightarrow_G^n w \Leftarrow (q, w, Z) \rightarrow_M^n (p, \epsilon, \epsilon)$ “: Mit Induktion über n .

IA: Beh. gilt für alle Werte $< n$. Zz: Beh. gilt für n .

Die Berechnung $(q, w, Z) \rightarrow_M^n (p, \epsilon, \epsilon)$ muss von dieser Form sein:

$$(q, w, Z) \rightarrow_M (r_0, w', Z_1 \dots Z_k) \rightarrow_M^{n-1} (p, \epsilon, \epsilon)$$

mit $w = bw'$, $(r_0, Z_1 \dots Z_k) \in \delta(q, b, Z)$.

Nach dem Zerlegungssatz muss es r_i , u_i und n_i geben mit

$$(r_{i-1}, u_i, Z_i) \rightarrow_M^{n_i} (r_i, \epsilon, \epsilon) \quad (i = 1, \dots, k)$$

und $w' = u_1 \dots u_k$, $\sum n_i = n - 1$.

Beweis (Forts.):

„ $[q, Z, p] \rightarrow_G^n w \Leftarrow (q, w, Z) \rightarrow_M^n (p, \epsilon, \epsilon)$ “: Mit Induktion über n .

IA: Beh. gilt für alle Werte $< n$. Zz: Beh. gilt für n .

Die Berechnung $(q, w, Z) \rightarrow_M^n (p, \epsilon, \epsilon)$ muss von dieser Form sein:

$$(q, w, Z) \rightarrow_M (r_0, w', Z_1 \dots Z_k) \rightarrow_M^{n-1} (p, \epsilon, \epsilon)$$

mit $w = bw'$, $(r_0, Z_1 \dots Z_k) \in \delta(q, b, Z)$.

Nach dem Zerlegungssatz muss es r_i , u_i und n_i geben mit

$$(r_{i-1}, u_i, Z_i) \rightarrow_M^{n_i} (r_i, \epsilon, \epsilon) \quad (i = 1, \dots, k)$$

und $w' = u_1 \dots u_k$, $\sum n_i = n - 1$.

$$\text{IA} \Rightarrow [r_{i-1}, Z_i, r_i] \rightarrow_G^{n_i} u_i$$

Beweis (Forts.):

„ $[q, Z, p] \rightarrow_G^n w \Leftarrow (q, w, Z) \rightarrow_M^n (p, \epsilon, \epsilon)$ “: Mit Induktion über n .

IA: Beh. gilt für alle Werte $< n$. Zz: Beh. gilt für n .

Die Berechnung $(q, w, Z) \rightarrow_M^n (p, \epsilon, \epsilon)$ muss von dieser Form sein:

$$(q, w, Z) \rightarrow_M (r_0, w', Z_1 \dots Z_k) \rightarrow_M^{n-1} (p, \epsilon, \epsilon)$$

mit $w = bw'$, $(r_0, Z_1 \dots Z_k) \in \delta(q, b, Z)$.

Nach dem Zerlegungssatz muss es r_i , u_i und n_i geben mit

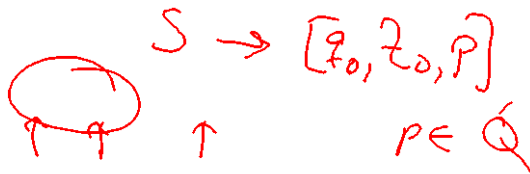
$$(r_{i-1}, u_i, Z_i) \rightarrow_M^{n_i} (r_i, \epsilon, \epsilon) \quad (i = 1, \dots, k)$$

und $w' = u_1 \dots u_k$, $\sum n_i = n - 1$.

$$\text{IA} \Rightarrow [r_{i-1}, Z_i, r_i] \rightarrow_G^{n_i} u_i$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow [q, Z, p] \rightarrow_G b[r_0, Z_1, r_1] \dots [r_{k-1}, Z_k, r_k] \\ &\rightarrow_G^{n-1} bu_1 \dots u_k = w \end{aligned}$$

□



Damit haben wir bewiesen:

Satz 3.59

Eine Sprache ist kontextfrei gdw sie von einem Kellerautomaten akzeptiert wird.

Lemma 3.58

$[q, Z, p] \rightarrow_G^n w$ gdw $(q, w, Z) \rightarrow_M^n (p, \epsilon, \epsilon)$

Beweis:

„ \Rightarrow “: Mit Induktion über n .

IA: Beh. gilt für alle Werte $< n$. Zz: Beh. gilt für n .

Die Ableitung $[q, Z, p] \rightarrow_G^n w$ muss von folgender Form sein:

$$\begin{aligned} [q, Z, r_k] &\rightarrow_G b[r_0, Z_1, r_1] \dots [r_{k-1}, Z_k, r_k] \\ &\rightarrow_G^{n-1} bu_1 \dots u_k = w \end{aligned}$$

mit $r_k = p$, $(r_0, Z_1 \dots Z_k) \in \delta(q, b, Z)$,

$[r_{i-1}, Z_i, r_i] \rightarrow_G^{n_i} u_i$ ($i = 1, \dots, k$) und $\sum n_i = n - 1$.

IA $\Rightarrow (r_{i-1}, u_i, Z_i) \rightarrow_M^{n_i} (r_i, \epsilon, \epsilon)$

Erweiterungslemma

$\Rightarrow (r_{i-1}, u_i \dots u_k, Z_i \dots Z_k) \rightarrow_M^{n_i} (r_i, u_{i+1} \dots u_k, Z_{i+1} \dots Z_k)$

$\Rightarrow (q, w, Z) \rightarrow_M (r_0, u_1 \dots u_k, Z_1 \dots Z_k) \rightarrow_M^{n-1} (r_k, \epsilon, \epsilon)$ □

3.10 Deterministische Kellerautomaten

Definition 3.60

Ein PDA heißt **deterministisch (DPDA)** gdw für alle $q \in Q$, $a \in \Sigma$ und $Z \in \Gamma$

$$|\delta(q, a, Z)| + |\delta(q, \epsilon, Z)| \leq 1$$

↑↑↑ ↑

3.10 Deterministische Kellerautomaten

Definition 3.60

Ein PDA heißt **deterministisch (DPDA)** gdw für alle $q \in Q$, $a \in \Sigma$ und $Z \in \Gamma$

$$|\delta(q, a, Z)| + |\delta(q, \epsilon, Z)| \leq 1$$

Beispiel 3.61

Der folgende DPDA mit $\Sigma = \{0, 1, \$\}$, $\Gamma = \{Z_0, 0, 1\}$ akzeptiert die Sprache

3.10 Deterministische Kellerautomaten

Definition 3.60

Ein PDA heißt **deterministisch (DPDA)** gdw für alle $q \in Q$, $a \in \Sigma$ und $Z \in \Gamma$

$$|\delta(q, a, Z)| + |\delta(q, \epsilon, Z)| \leq 1$$

Beispiel 3.61

Der folgende DPDA mit $\Sigma = \{0, 1, \$\}$, $\Gamma = \{Z_0, 0, 1\}$ akzeptiert die Sprache $\{w\$w^R \mid w \in \{0, 1\}^*\}$.

$$\begin{aligned} \delta(p, \$, z_0) &= \{(p, q, z_0)\}, \\ \delta(p, a, z) &= \{(q, z)\}, \quad a \in \{0, 1\}, z \in \Gamma \\ \delta(q, a, a) &\Rightarrow \{(q, \epsilon)\}, \quad a \in \{0, 1\} \\ \delta(r, \epsilon, z_0) &= \{(r, \epsilon)\} \end{aligned}$$

Definition 3.62

Eine CFL heißt **deterministisch (DCFL)** gdw sie von einem DPDA akzeptiert wird.

Definition 3.62

Eine CFL heißt **deterministisch (DCFL)** gdw sie von einem DPDA akzeptiert wird.

Man kann zeigen: Die CFL $\{ww^R \mid w \in \{0, 1\}^*\}$ ist nicht deterministisch.

Definition 3.62

Eine CFL heißt **deterministisch (DCFL)** gdw sie von einem DPDA akzeptiert wird.

Man kann zeigen: Die CFL $\{ww^R \mid w \in \{0, 1\}^*\}$ ist nicht deterministisch.

Da man jeden DFA leicht mit einem DPDA simulieren kann:

Definition 3.62

Eine CFL heißt **deterministisch (DCFL)** gdw sie von einem DPDA akzeptiert wird.

Man kann zeigen: Die CFL $\{ww^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$ ist nicht deterministisch.

Da man jeden DFA leicht mit einem DPDA simulieren kann:

Fakt 3.63

Jede reguläre Sprache ist eine DCFL.

Definition 3.62

Eine CFL heißt **deterministisch (DCFL)** gdw sie von einem DPDA akzeptiert wird.

Man kann zeigen: Die CFL $\{ww^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$ ist nicht deterministisch.

Da man jeden DFA leicht mit einem DPDA simulieren kann:

Fakt 3.63

Jede reguläre Sprache ist eine DCFL.

Eine Sprache erfüllt die **Präfix Bedingung** gdw wenn sie keine **zwei** **Wörter** enthält, so dass das eine ein *echtes* Präfix des anderen ist.

Eine Sprache erfüllt die **Präfix Bedingung** gdw wenn sie keine zwei Wörter enthält, so dass das eine ein *echtes* Präfix des anderen ist.

Beispiel 3.64

- Die Sprache a^* erfüllt die Präfix Bedingung nicht.

Eine Sprache erfüllt die **Präfix Bedingung** gdw wenn sie keine zwei Wörter enthält, so dass das eine ein *echtes* Präfix des anderen ist.

Beispiel 3.64

- Die Sprache a^* erfüllt die Präfix Bedingung nicht.
- Die Sprache $\{w\$w^R \mid w \in \{0, 1\}^*\}$ erfüllt die Präfix Bedingung.

Eine Sprache erfüllt die **Präfix Bedingung** gdw wenn sie keine zwei Wörter enthält, so dass das eine ein *echtes* Präfix des anderen ist.

Beispiel 3.64

- Die Sprache a^* erfüllt die Präfix Bedingung nicht.
- Die Sprache $\{w\$w^R \mid w \in \{0, 1\}^*\}$ erfüllt die Präfix Bedingung.

Lemma 3.65

$\exists DPDA M. L = L_\epsilon(M) \Leftrightarrow$

$\exists DPDA M. L = L_F(M)$ und L erfüllt die Präfix Bedingung

Eine Sprache erfüllt die **Präfix Bedingung** gdw wenn sie keine zwei Wörter enthält, so dass das eine ein *echtes* Präfix des anderen ist.

Beispiel 3.64

- Die Sprache a^* erfüllt die Präfix Bedingung nicht.
- Die Sprache $\{w\$w^R \mid w \in \{0, 1\}^*\}$ erfüllt die Präfix Bedingung.

Lemma 3.65

$\exists DPDA M. L = L_\epsilon(M) \Leftrightarrow$

$\exists DPDA M. L = L_F(M)$ und L erfüllt die Präfix Bedingung

Beweis: Übung!

Eine Sprache erfüllt die **Präfix Bedingung** gdw wenn sie keine zwei Wörter enthält, so dass das eine ein *echtes* Präfix des anderen ist.

Beispiel 3.64

- Die Sprache a^* erfüllt die Präfix Bedingung nicht.
- Die Sprache $\{w\$w^R \mid w \in \{0, 1\}^*\}$ erfüllt die Präfix Bedingung.

Lemma 3.65

$\exists DPDA M. L = L_\epsilon(M) \Leftrightarrow$

$\exists DPDA M. L = L_F(M)$ und L erfüllt die Präfix Bedingung

Beweis: Übung!

Es gibt also einen DPDA M mit $L_F(M) = L(a^*)$ aber keinen DPDA mit $L_\epsilon(M) = L(a^*)$.

Satz 3.66

Die Klasse der DCFLs ist unter Komplement abgeschlossen.

Satz 3.66

Die Klasse der DCFLs ist unter Komplement abgeschlossen.

Satz 3.66

Die Klasse der DCFLs ist unter Komplement abgeschlossen.

Beweis: Komplex. Siehe zB Erk&Prieese oder Kozen.

Satz 3.66

Die Klasse der DCFLs ist unter Komplement abgeschlossen.

Beweis: Komplex. Siehe zB Erk&Prieese oder Kozen.

Da die CFLs *nicht* unter Komplement abgeschlossen sind:

Korollar 3.67

Die DCFLs sind eine echte Teilklasse der CFLs.

Satz 3.66

Die Klasse der DCFLs ist unter Komplement abgeschlossen.

Beweis: Komplex. Siehe zB Erk&Priese oder Kozen.

Da die CFLs *nicht* unter Komplement abgeschlossen sind:

Korollar 3.67

Die DCFLs sind eine echte Teilklasse der CFLs.

Hier ist eine konkrete Sprache in CFL \ DCFL:

Sei $L_{ww} := \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$.

Satz 3.66

Die Klasse der DCFLs ist unter Komplement abgeschlossen.

Beweis: Komplex. Siehe zB Erk&Priese oder Kozen.

Da die CFLs *nicht* unter Komplement abgeschlossen sind:

Korollar 3.67

Die DCFLs sind eine echte Teilklasse der CFLs.

Hier ist eine konkrete Sprache in CFL \ DCFL:

Sei $L_{ww} := \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$.

Dann ist $L := \{a, b\}^* \setminus L_{ww}$ eine CFL aber keine DCFL.

Satz 3.66

Die Klasse der DCFLs ist unter Komplement abgeschlossen.

Beweis: Komplex. Siehe zB Erk&Priese oder Kozen.

Da die CFLs *nicht* unter Komplement abgeschlossen sind:

Korollar 3.67

Die DCFLs sind eine echte Teilklasse der CFLs.

Hier ist eine konkrete Sprache in CFL \ DCFL:

Sei $L_{ww} := \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$.

Dann ist $L := \{a, b\}^* \setminus L_{ww}$ eine CFL aber keine DCFL.

L wird von folgender CFG erzeugt (ohne Beweis):

$$\begin{aligned} S &\rightarrow AB \mid BA \mid A \mid B \\ A &\rightarrow CAC \mid a \quad B \rightarrow CBC \mid b \quad C \rightarrow a \mid b \end{aligned}$$

Satz 3.66

Die Klasse der DCFLs ist unter Komplement abgeschlossen.

Beweis: Komplex. Siehe zB Erk&Priese oder Kozen.

Da die CFLs *nicht* unter Komplement abgeschlossen sind:

Korollar 3.67

Die DCFLs sind eine echte Teilklasse der CFLs.

Hier ist eine konkrete Sprache in CFL \ DCFL:

Sei $L_{ww} := \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$.

Dann ist $L := \{a, b\}^* \setminus L_{ww}$ eine CFL aber keine DCFL.

L wird von folgender CFG erzeugt (ohne Beweis):

$$\begin{aligned} S &\rightarrow AB \mid BA \mid A \mid B \\ A &\rightarrow CAC \mid a \quad B \rightarrow CBC \mid b \quad C \rightarrow a \mid b \end{aligned}$$

Wäre L eine DCFL, dann auch $\bar{L} = L_{ww}$ (wegen Satz 3.66).

Aber mit dem Pumping Lemma kann man zeigen, dass L_{ww} keine CFL ist [HMU],

Lemma 3.68

Die Klasse der DCFLs ist weder unter Schnitt noch unter Vereinigung abgeschlossen.

Lemma 3.68

Die Klasse der DCFLs ist weder unter Schnitt noch unter Vereinigung abgeschlossen.

Beweis:

Erinnerung: CFLs nicht unter Schnitt abgeschlossen:

$L_1 := \{a^i b^i c^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ ist kontextfrei

$L_2 := \{a^i b^j c^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ ist kontextfrei

$L_1 \cap L_2 = \{a^i b^i c^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ ist nicht kontextfrei

Lemma 3.68

Die Klasse der DCFLs ist weder unter Schnitt noch unter Vereinigung abgeschlossen.

Beweis:

Erinnerung: CFLs nicht unter Schnitt abgeschlossen:

$L_1 := \{a^i b^i c^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ ist kontextfrei

$L_2 := \{a^i b^j c^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ ist kontextfrei

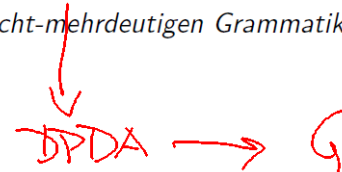
$L_1 \cap L_2 = \{a^i b^i c^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ ist nicht kontextfrei

Aber L_1 und L_2 sind sogar DCFLs.

Da $L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$ können die DCFLs auch nicht unter Vereinigung abgeschlossen sein. \square

Lemma 3.69

Jede DCFL ist nicht inhärent mehrdeutig, dh sie wird von einer nicht-mehrdeutigen Grammatik erzeugt.



Lemma 3.69

Jede DCFL ist nicht inhärent mehrdeutig, dh sie wird von einer nicht-mehrdeutigen Grammatik erzeugt.

Beweisidee: Die Konversion PDA \rightarrow CFG erzeugt aus einem DPDA eine nicht-mehrdeutige CFG. [HMU]

Lemma 3.69

Jede DCFL ist nicht inhärent mehrdeutig, dh sie wird von einer nicht-mehrdeutigen Grammatik erzeugt.

Beweisidee: Die Konversion PDA \rightarrow CFG erzeugt aus einem DPDA eine nicht-mehrdeutige CFG. [HMU]

Satz 3.70

Das Wortproblem für DCFLs ist in linearer Zeit lösbar.

Lemma 3.69

Jede DCFL ist nicht inhärent mehrdeutig, dh sie wird von einer nicht-mehrdeutigen Grammatik erzeugt.

Beweisidee: Die Konversion PDA \rightarrow CFG erzeugt aus einem DPDA eine nicht-mehrdeutige CFG. [HMU]

Satz 3.70

Das Wortproblem für DCFLs ist in linearer Zeit lösbar.

Mehr Information: Vorlesungen zum Übersetzerbau

gacc
bison

3.11 Tabellarischer Überblick

Abschlusseigenschaften

	Schnitt	Vereinigung	Komplement	Produkt	Stern
Regulär	ja	ja	ja	ja	ja

3.11 Tabellarischer Überblick

Abschlusseigenschaften

	Schnitt	Vereinigung	Komplement	Produkt	Stern
Regulär	ja	ja	ja	ja	ja
DCFL	nein	nein	ja	nein	nein

3.11 Tabellarischer Überblick

Abschlusseigenschaften

	Schnitt	Vereinigung	Komplement	Produkt	Stern
Regulär	ja	ja	ja	ja	ja
DCFL	nein	nein	ja	nein	nein
CFL	nein	ja	nein	ja	ja

3.11 Tabellarischer Überblick

Abschlusseigenschaften

	Schnitt	Vereinigung	Komplement	Produkt	Stern
Regulär	ja	ja	ja	ja	ja
DCFL	nein	nein	ja	nein	nein
CFL	nein	ja	nein	ja	ja

Entscheidbarkeit

	Wortproblem			
DFA				
DPDA				
CFG				

3.11 Tabellarischer Überblick

Abschlusseigenschaften

	Schnitt	Vereinigung	Komplement	Produkt	Stern
Regulär	ja	ja	ja	ja	ja
DCFL	nein	nein	ja	nein	nein
CFL	nein	ja	nein	ja	ja

Entscheidbarkeit

	Wortproblem			
DFA	$O(n)$			
DPDA	$O(n)$			
CFG	$O(n^3)$			

3.11 Tabellarischer Überblick

Abschlusseigenschaften

	Schnitt	Vereinigung	Komplement	Produkt	Stern
Regulär	ja	ja	ja	ja	ja
DCFL	nein	nein	ja	nein	nein
CFL	nein	ja	nein	ja	ja

Entscheidbarkeit

	Wortproblem	Leerheit		
DFA	$O(n)$			
DPDA	$O(n)$			
CFG	$O(n^3)$			

3.11 Tabellarischer Überblick

Abschlusseigenschaften

	Schnitt	Vereinigung	Komplement	Produkt	Stern
Regulär	ja	ja	ja	ja	ja
DCFL	nein	nein	ja	nein	nein
CFL	nein	ja	nein	ja	ja

Entscheidbarkeit

	Wortproblem	Leerheit		
DFA	$O(n)$	$O(n)$		
DPDA	$O(n)$	Polyn		
CFG	$O(n^3)$	$O(n)$		

3.11 Tabellarischer Überblick

Abschlusseigenschaften

	Schnitt	Vereinigung	Komplement	Produkt	Stern
Regulär	ja	ja	ja	ja	ja
DCFL	nein	nein	ja	nein	nein
CFL	nein	ja	nein	ja	ja

Entscheidbarkeit

	Wortproblem	Leerheit	Äquivalenz	
DFA	$O(n)$	ja		
DPDA	$O(n)$	ja		
CFG	$O(n^3)$	ja		

3.11 Tabellarischer Überblick

Abschlusseigenschaften

	Schnitt	Vereinigung	Komplement	Produkt	Stern
Regulär	ja	ja	ja	ja	ja
DCFL	nein	nein	ja	nein	nein
CFL	nein	ja	nein	ja	ja

Entscheidbarkeit

	Wortproblem	Leerheit	Äquivalenz	
DFA	$O(n)$	ja	ja	
DPDA	$O(n)$	ja	ja	
CFG	$O(n^3)$	ja	nein(*)	

Sénizergues (1997), Stirling (2001)

(*) Vorschau

3.11 Tabellarischer Überblick

Abschlusseigenschaften

	Schnitt	Vereinigung	Komplement	Produkt	Stern
Regulär	ja	ja	ja	ja	ja
DCFL	nein	nein	ja	nein	nein
CFL	nein	ja	nein	ja	ja

Entscheidbarkeit

	Wortproblem	Leerheit	Äquivalenz	Schnittproblem
DFA	$O(n)$	ja	ja	ja
DPDA	$O(n)$	ja	ja	nein(*)
CFG	$O(n^3)$	ja	nein(*)	nein(*)

Sénizergues (1997), Stirling (2001)

(*) Vorschau

3.11 Tabellarischer Überblick

Abschlusseigenschaften

	Schnitt	Vereinigung	Komplement	Produkt	Stern
Regulär	ja	ja	ja	ja	ja
DCFL	nein	nein	ja	nein	nein
CFL	nein	ja	nein	ja	ja

Entscheidbarkeit

	Wortproblem	Leerheit	Äquivalenz	Schnittproblem
DFA	$O(n)$	ja	ja	ja
DPDA	$O(n)$	ja	ja	nein(*)
CFG	$O(n^3)$	ja	nein(*)	nein(*)

Sénizergues (1997), Stirling (2001)

(*) Vorschau

3.12 Die Chomsky-Hierarchie

3.12 Die Chomsky-Hierarchie

Definition 3.71

Eine **Grammatik** G ist ein 4-Tupel (V, Σ, P, S) , wobei P eine endliche Teilmenge von $(V \cup \Sigma)^+ \times (V \cup \Sigma)^+$ ist,

3.12 Die Chomsky-Hierarchie

Definition 3.71

Eine Grammatik G ist ein 4-Tupel (V, Σ, P, S) , wobei P eine endliche Teilmenge von $(V \cup \Sigma)^+ \times (V \cup \Sigma)^+$ ist, dh jede Produktion ist von der Form $\alpha \rightarrow \beta$.

3.12 Die Chomsky-Hierarchie

Definition 3.71

Eine Grammatik G ist ein 4-Tupel (V, Σ, P, S) , wobei P eine endliche Teilmenge von $(V \cup \Sigma)^+ \times (V \cup \Sigma)^+$ ist, dh jede Produktion ist von der Form $\alpha \rightarrow \beta$.

G ist vom

Typ 0

Typ 1 falls $|\alpha| \leq |\beta|$

$$\alpha A \rightarrow B$$

$$\alpha \bar{A} \rightarrow A b$$

3.12 Die Chomsky-Hierarchie

Definition 3.71

Eine Grammatik G ist ein 4-Tupel (V, Σ, P, S) , wobei P eine endliche Teilmenge von $(V \cup \Sigma)^+ \times (V \cup \Sigma)^+$ ist, dh jede Produktion ist von der Form $\alpha \rightarrow \beta$.

G ist vom

Typ 0

Typ 1 falls $|\alpha| \leq |\beta|$

Typ 2 falls G vom Typ 1 ist und $\alpha \in V$

$$A \rightarrow a B L C$$

3.12 Die Chomsky-Hierarchie

Definition 3.71

Eine Grammatik G ist ein 4-Tupel (V, Σ, P, S) , wobei P eine endliche Teilmenge von $(V \cup \Sigma)^+ \times (V \cup \Sigma)^+$ ist, dh jede Produktion ist von der Form $\alpha \rightarrow \beta$.

G ist vom

Typ 0

Typ 1 falls $|\alpha| \leq |\beta|$

Typ 2 falls G vom Typ 1 ist und $\alpha \in V$

Typ 3 falls G vom Typ 2 ist und $\beta \in \Sigma \cup \Sigma V$.

$$A \rightarrow a$$

$$A \rightarrow b B$$

3.12 Die Chomsky-Hierarchie

Definition 3.71

Eine **Grammatik** G ist ein 4-Tupel (V, Σ, P, S) , wobei P eine endliche Teilmenge von $(V \cup \Sigma)^+ \times (V \cup \Sigma)^+$ ist, dh jede Produktion ist von der Form $\alpha \rightarrow \beta$.

G ist vom

Typ 0

Typ 1 falls $|\alpha| \leq |\beta|$

Typ 2 falls G vom Typ 1 ist und $\alpha \in V$

Typ 3 falls G vom Typ 2 ist und $\beta \in \Sigma \cup \Sigma V$.

Zusätzlich erlaubt man noch $S \rightarrow \epsilon$.

3.12 Die Chomsky-Hierarchie

Definition 3.71

Eine **Grammatik** G ist ein 4-Tupel (V, Σ, P, S) , wobei P eine endliche Teilmenge von $(V \cup \Sigma)^+ \times (V \cup \Sigma)^+$ ist, dh jede Produktion ist von der Form $\alpha \rightarrow \beta$.

G ist vom

Typ 0

Typ 1 falls $|\alpha| \leq |\beta|$

Typ 2 falls G vom Typ 1 ist und $\alpha \in V$

Typ 3 falls G vom Typ 2 ist und $\beta \in \Sigma \cup \Sigma V$.

Zusätzlich erlaubt man noch $S \rightarrow \epsilon$.

Offensichtlich gilt:

$$\text{Typ 3} \subset \text{Typ 2} \subset \text{Typ 1} \subset \text{Typ 0}$$

Grammatiken, Maschinen und Sprachklassen:

Typ 3	Rechtslineare Grammatik Endlicher Automat
-------	--

Grammatiken, Maschinen und Sprachklassen:

Typ 3	Rechtslineare Grammatik Endlicher Automat
Typ 2	kontextfreie Grammatik Kellerautomat

Grammatiken, Maschinen und Sprachklassen:

Typ 3	Rechtslineare Grammatik Endlicher Automat
Typ 2	kontextfreie Grammatik Kellerautomat
Typ 1	Kontextsensitive Grammatik Linear beschränkter Automat
Typ 0	Chomsky-Grammatik, Phrasenstrukturgrammatik Turingmaschine

Grammatiken, Maschinen und Sprachklassen:

Typ 3	Rechtslineare Grammatik Endlicher Automat
Typ 2	kontextfreie Grammatik Kellerautomat
Typ 1	Kontextsensitive Grammatik Linear beschränkter Automat
Typ 0	Chomsky-Grammatik, Phrasenstrukturgrammatik Turingmaschine

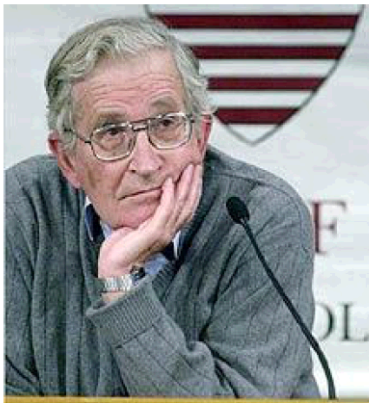
Satz 3.72

$$L(\text{Typ 3}) \subset L(\text{Typ 2}) \subset L(\text{Typ 1}) \subset L(\text{Typ 0})$$

$\neq \quad \neq \quad \neq$

 Noam Chomsky.

Three Models for the Description of Language. Transactions on Information Theory, 113-124, 1956.



Noam Chomsky (* 7. Dezember 1928) ist Professor für Linguistik am MIT und ein bedeutender Sprachwissenschaftler. Er entwickelte die Chomsky-Hierarchie.

 Noam Chomsky.

Three Models for the Description of Language. Transactions on Information Theory, 113-124, 1956.



Noam Chomsky (* 7. Dezember 1928) ist Professor für Linguistik am MIT und ein bedeutender Sprachwissenschaftler. Er entwickelte die Chomsky-Hierarchie. Neben seiner linguistischen Arbeit gilt Chomsky als einer der bedeutendsten Intellektuellen Nordamerikas und ist als scharfer Kritiker der US-amerikanischen Außenpolitik bekannt.

 [Noam Chomsky](#).

Three Models for the Description of Language. Transactions on Information Theory, 113-124, 1956.



Noam Chomsky (* 7. Dezember 1928) ist Professor für [Linguistik](#) am [MIT](#) und ein bedeutender Sprachwissenschaftler. Er entwickelte die [Chomsky-Hierarchie](#). Neben seiner linguistischen Arbeit gilt Chomsky als einer der bedeutendsten [Intellektuellen](#) Nordamerikas und ist als scharfer Kritiker der US-amerikanischen Außenpolitik bekannt. Seine politische Heimat ist der [Anarchosyndikalismus](#).
[Wikipedia]