

Beispiel 3.49

Die Sprache $L = \{ww^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$ wird vom PDA

$$M = (\{p, q, r\}, \{0, 1\}, \{0, 1, Z_0\}, p, Z_0, \delta, \{r\})$$

$$\delta(p, a, Z) = \{(p, aZ)\} \quad \text{für } a \in \{0, 1\}, Z \in \{0, 1, Z_0\}$$

$$\delta(p, \epsilon, Z) = \{(q, Z)\} \quad \text{für } Z \in \{0, 1, Z_0\}$$

$$\delta(q, a, a) = \{(q, \epsilon)\} \quad \text{für } a \in \{0, 1\}$$

$$\delta(q, \epsilon, Z_0) = \{(r, \epsilon)\}$$

sowohl mit Endzustand als auch mit leerem Keller akzeptiert.

Bsp: $(p, 1111, Z_0) \rightarrow_M^* (r, \epsilon, \epsilon)$.

Definiert man $\delta(q, \epsilon, Z_0)$ als $\{(q, \epsilon)\}$ statt $\{(r, \epsilon)\}$ so gilt:

$$L_F(M') = \emptyset \text{ aber } L_\epsilon(M') = L.$$

Bemerkungen: PDAs und das Wortproblem

Bemerkungen: PDAs und das Wortproblem

- Mit einem NFA A kann man $w \in L(A)$ durch parallele Verfolgung aller Berechnungspfade entscheiden, da sie alle endlich sind.

Bemerkungen: PDAs und das Wortproblem

- Mit einem NFA A kann man $w \in L(A)$ durch parallele Verfolgung aller Berechnungspfade entscheiden, da sie alle endlich sind.
- Bei einem ϵ -NFA gibt es auch unendliche Berechnungspfade, die aber einfach zu eliminieren sind.
- Bei einem PDA kann es wegen ϵ -Übergängen auch unendliche Berechnungen \rightarrow_M geben,

Bemerkungen: PDAs und das Wortproblem

- Mit einem NFA A kann man $w \in L(A)$ durch parallele Verfolgung aller Berechnungspfade entscheiden, da sie alle endlich sind.
- Bei einem ϵ -NFA gibt es auch unendliche Berechnungspfade, die aber einfach zu eliminieren sind.
- Bei einem PDA kann es wegen ϵ -Übergängen auch unendliche Berechnungen \rightarrow_M geben, zB $\delta(q, \epsilon, Z) = \{(q, ZZ)\}$.

Bemerkungen: PDAs und das Wortproblem

- Mit einem NFA A kann man $w \in L(A)$ durch parallele Verfolgung aller Berechnungspfade entscheiden, da sie alle endlich sind.
- Bei einem ϵ -NFA gibt es auch unendliche Berechnungspfade, die aber einfach zu eliminieren sind.
- Bei einem PDA kann es wegen ϵ -Übergängen auch unendliche Berechnungen \rightarrow_M geben, zB $\delta(q, \epsilon, Z) = (q, ZZ)$:

$$(q, w, Z) \rightarrow_M (q, w, ZZ) \rightarrow_M (q, w, ZZZ) \rightarrow_M \dots$$

Diese sind wegen des möglicherweise wachsenden oder pulsierenden Kellers nicht einfach zu eliminieren.

- Daher ist es a priori unklar, wie man mit einem PDA das Wortproblem entscheidet.

Ziel:

Akzeptanz durch Endzustände und leeren Keller gleich mächtig.

Ziel:

Akzeptanz durch Endzustände und leeren Keller gleich mächtig.

Satz 3.50 (Endzustand \rightarrow leerer Keller)

Zu jedem PDA $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta, F)$ kann man in linearer Zeit einen PDA $M' = (Q', \Sigma, \Gamma', q'_0, Z'_0, \delta')$ konstruieren mit $L_F(M) = L_\epsilon(M')$.

Ziel:

Akzeptanz durch Endzustände und leeren Keller gleich mächtig.

Satz 3.50 (Endzustand \rightarrow leerer Keller)

Zu jedem PDA $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta, F)$ kann man in linearer Zeit einen PDA $M' = (Q', \Sigma, \Gamma', q'_0, Z'_0, \delta')$ konstruieren mit $L_F(M) = L_\epsilon(M')$.

Ziel:

$$(q_0, w, Z_0) \rightarrow_M^* (f, \epsilon, \gamma) \Leftrightarrow (q'_0, w, Z'_0) \rightarrow_{M'}^* (q, \epsilon, \epsilon)$$

Beweisskizze:

M' (mit leerem Keller) simuliert M (mit Endzustand).

Beweisskizze:

M' (mit leerem Keller) simuliert M (mit Endzustand). Zusätzlich:

- Sobald M einen Endzustand erreicht, darf M' den Keller leeren (im neuen Zustand \bar{q}).
- Um zu verhindern, dass der Keller von M' leer wird, ohne dass M in einem Endzustand ist, führen wir ein neues Kellersymbol Z'_0 ein.

Beweisskizze:

M' (mit leerem Keller) simuliert M (mit Endzustand). Zusätzlich:

- Sobald M einen Endzustand erreicht, darf M' den Keller leeren (im neuen Zustand \bar{q}).
- Um zu verhindern, dass der Keller von M' leer wird, ohne dass M in einem Endzustand ist, führen wir ein neues Kellersymbol Z'_0 ein.

$$Q' := Q \uplus \{\bar{q}, q'_0\}$$

Beweisskizze:

M' (mit leerem Keller) simuliert M (mit Endzustand). Zusätzlich:

- Sobald M einen Endzustand erreicht, darf M' den Keller leeren (im neuen Zustand \bar{q}).
- Um zu verhindern, dass der Keller von M' leer wird, ohne dass M in einem Endzustand ist, führen wir ein neues Kellersymbol Z'_0 ein.

$$\begin{aligned} Q' &:= Q \uplus \{\bar{q}, q'_0\} \\ \Gamma' &:= \Gamma \uplus \{Z'_0\} \end{aligned}$$

Wir **erweitern** δ zu δ' :

$$\delta'(q'_0, \epsilon, Z'_0) = \{(q_0, Z_0 Z'_0)\}$$

Beweisskizze:

M' (mit leerem Keller) simuliert M (mit Endzustand). Zusätzlich:

- Sobald M einen Endzustand erreicht, darf M' den Keller leeren (im neuen Zustand \bar{q}).
- Um zu verhindern, dass der Keller von M' leer wird, ohne dass M in einem Endzustand ist, führen wir ein neues Kellersymbol Z'_0 ein.

$$\begin{aligned} Q' &:= Q \uplus \{\bar{q}, q'_0\} \\ \Gamma' &:= \Gamma \uplus \{Z'_0\} \end{aligned}$$

Wir **erweitern** δ zu δ' :

$$\delta'(q'_0, \epsilon, Z'_0) = \{(q_0, Z_0 Z'_0)\}$$

$$\delta'(q, b, Z) = \delta(q, b, Z) \quad \text{für } q \in Q \setminus F, b \in \Sigma \cup \{\epsilon\}, Z \in \Gamma$$

$$\delta'(f, a, Z) = \delta(f, a, Z) \quad \text{für } f \in F, a \in \Sigma, Z \in \Gamma$$

$$\delta'(f, \epsilon, Z) = \delta(f, \epsilon, Z) \cup \{(\bar{q}, \epsilon)\} \quad \text{für } f \in F, Z \in \Gamma'$$

Beweisskizze:

M' (mit leerem Keller) simuliert M (mit Endzustand). Zusätzlich:

- Sobald M einen Endzustand erreicht, darf M' den Keller leeren (im neuen Zustand \bar{q}).
- Um zu verhindern, dass der Keller von M' leer wird, ohne dass M in einem Endzustand ist, führen wir ein neues Kellersymbol Z'_0 ein.

$$\begin{aligned} Q' &:= Q \uplus \{\bar{q}, q'_0\} \\ \Gamma' &:= \Gamma \uplus \{Z'_0\} \end{aligned}$$

Wir **erweitern** δ zu δ' :

$$\delta'(q'_0, \epsilon, Z'_0) = \{(q_0, Z_0 Z'_0)\}$$

$$\delta'(q, b, Z) = \delta(q, b, Z) \quad \text{für } q \in Q \setminus F, b \in \Sigma \cup \{\epsilon\}, Z \in \Gamma$$

$$\delta'(f, a, Z) = \delta(f, a, Z) \quad \text{für } f \in F, a \in \Sigma, Z \in \Gamma$$

$$\delta'(f, \epsilon, Z) = \delta(f, \epsilon, Z) \cup \{(\bar{q}, \epsilon)\} \quad \text{für } f \in F, Z \in \Gamma'$$

$$\delta'(\bar{q}, \epsilon, Z) = \{(\bar{q}, \epsilon)\} \quad \text{für } Z \in \Gamma' \quad \square$$

Satz 3.51 (Leerer Keller \rightarrow Endzustand)

Zu jedem PDA $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta)$ kann man in linearer Zeit einen PDA $M' = (Q', \Sigma, \Gamma', q'_0, Z'_0, \delta', F)$ konstruieren mit $L_\epsilon(M) = L_F(M')$.

Satz 3.51 (Leerer Keller → Endzustand)

Zu jedem PDA $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta)$ kann man in linearer Zeit einen PDA $M' = (Q', \Sigma, \Gamma', q'_0, Z'_0, \delta', F)$ konstruieren mit $L_\epsilon(M) = L_F(M')$.

Beweisskizze:

M' (mit Endzustand) simuliert M (mit leerem Keller). Zusätzlich:

- M' schreibt am Anfang ein neues Zeichen Z'_0 auf den Keller.

Satz 3.51 (Leerer Keller → Endzustand)

Zu jedem PDA $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta)$ kann man in linearer Zeit einen PDA $M' = (Q', \Sigma, \Gamma', q'_0, Z'_0, \delta', F)$ konstruieren mit $L_\epsilon(M) = L_F(M')$.

Beweisskizze:

M' (mit Endzustand) simuliert M (mit leerem Keller). Zusätzlich:

- M' schreibt am Anfang ein neues Zeichen Z'_0 auf den Keller.
- Sobald M auf dem Keller Z'_0 findet, ist der Keller eigentlich leer, und M' geht in den (neuen) Endzustand f .

Satz 3.51 (Leerer Keller → Endzustand)

Zu jedem PDA $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta)$ kann man in linearer Zeit einen PDA $M' = (Q', \Sigma, \Gamma', q'_0, Z'_0, \delta', F)$ konstruieren mit $L_\epsilon(M) = L_F(M')$.

Beweisskizze:

M' (mit Endzustand) simuliert M (mit leerem Keller). Zusätzlich:

- M' schreibt am Anfang ein neues Zeichen Z'_0 auf den Keller.
- Sobald M auf dem Keller Z'_0 findet, ist der Keller eigentlich leer, und M' geht in den (neuen) Endzustand f .

$$Q' := Q \uplus \{q'_0, f\}$$

$$\Gamma' := \Gamma \uplus \{Z'_0\}$$

$$F := \{f\}$$

Satz 3.51 (Leerer Keller → Endzustand)

Zu jedem PDA $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta)$ kann man in linearer Zeit einen PDA $M' = (Q', \Sigma, \Gamma', q'_0, Z'_0, \delta', F)$ konstruieren mit $L_\epsilon(M) = L_F(M')$.

Beweisskizze:

M' (mit Endzustand) simuliert M (mit leerem Keller). Zusätzlich:

- M' schreibt am Anfang ein neues Zeichen Z'_0 auf den Keller.
- Sobald M auf dem Keller Z'_0 findet, ist der Keller eigentlich leer, und M' geht in den (neuen) Endzustand f .

$$Q' := Q \uplus \{q'_0, f\}$$

$$\Gamma' := \Gamma \uplus \{Z'_0\}$$

$$F := \{f\}$$

$$\delta'(q'_0, \epsilon, Z'_0) = \{(q_0, Z_0 Z'_0)\}$$

$$\delta'(q, b, Z) = \delta(q, b, Z) \quad \text{für } q \in Q, b \in \Sigma \cup \{\epsilon\}, Z \in \Gamma$$

$$\delta'(q, \epsilon, Z'_0) = \{(f, Z'_0)\} \quad \text{für } q \in Q \quad \square$$

Die folgenden Sätze erleichtern Beweise über Berechnungen von PDAs.

Die folgenden Sätze erleichtern Beweise über Berechnungen von PDAs.

Lemma 3.52 (Erweiterungslemma)

$$(q, u, \alpha) \rightarrow_M^n (q', u', \alpha') \implies (q, uv, \alpha\beta) \rightarrow_M^n (q', u'v, \alpha'\beta)$$

Die folgenden Sätze erleichtern Beweise über Berechnungen von PDAs.

Lemma 3.52 (Erweiterungslemma)

$$(q, u, \alpha) \rightarrow_M^n (q', u', \alpha') \implies (q, uv, \alpha\beta) \rightarrow_M^n (q', u'v, \alpha'\beta)$$

Beweis:

Nach Definition von \rightarrow_M gilt

$$\begin{aligned} (q_i, u_i, \alpha_i) &\rightarrow_M (q_{i+1}, u_{i+1}, \alpha_{i+1}) \implies \\ (q_i, u_i v, \alpha_i \beta) &\rightarrow_M (q_{i+1}, u_{i+1} v, \alpha_{i+1} \beta) \end{aligned}$$

Die folgenden Sätze erleichtern Beweise über Berechnungen von PDAs.

Lemma 3.52 (Erweiterungslemma)

$$(q, u, \alpha) \rightarrow_M^n (q', u', \alpha') \implies (q, uv, \alpha\beta) \rightarrow_M^n (q', u'v, \alpha'\beta)$$

Beweis:

Nach Definition von \rightarrow_M gilt

$$\begin{aligned} (q_i, u_i, \alpha_i) &\rightarrow_M (q_{i+1}, u_{i+1}, \alpha_{i+1}) \implies \\ (q_i, u_i v, \alpha_i \beta) &\rightarrow_M (q_{i+1}, u_{i+1} v, \alpha_{i+1} \beta) \end{aligned}$$

Mit Induktion über n folgt die Behauptung. □

Die folgenden Sätze erleichtern Beweise über Berechnungen von PDAs.

Lemma 3.52 (Erweiterungslemma)

$$(q, u, \alpha) \rightarrow_M^n (q', u', \alpha') \implies (q, uv, \alpha\beta) \rightarrow_M^n (q', u'v, \alpha'\beta)$$

Beweis:

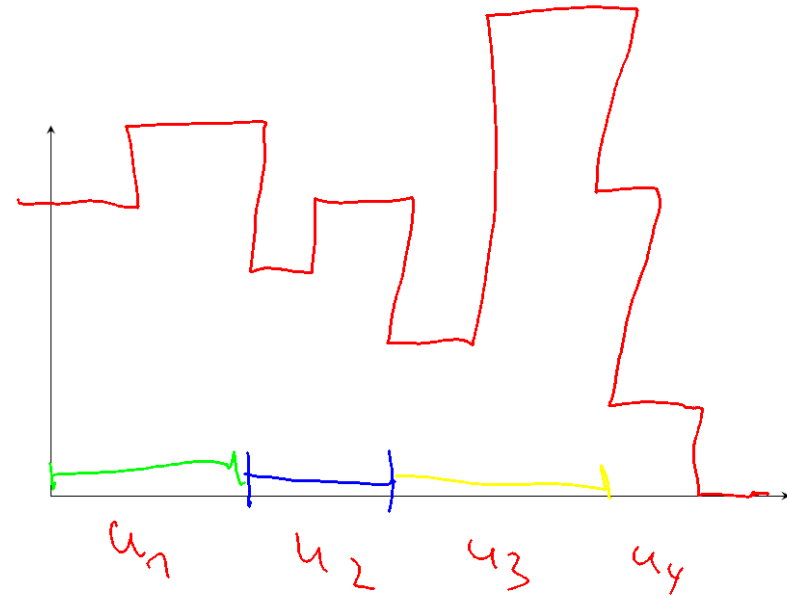
Nach Definition von \rightarrow_M gilt

$$\begin{aligned} (q_i, u_i, \alpha_i) &\rightarrow_M (q_{i+1}, u_{i+1}, \alpha_{i+1}) \implies \\ (q_i, u_i v, \alpha_i \beta) &\rightarrow_M (q_{i+1}, u_{i+1} v, \alpha_{i+1} \beta) \end{aligned}$$

Mit Induktion über n folgt die Behauptung. □

Gilt die Umkehrung, zB

$$(q_1, aa, XZ) \rightarrow_M^* (q_3, \epsilon, YZ) \implies (q_1, aa, X) \rightarrow_M^* (q_3, \epsilon, Y) ?$$



Satz 3.53 (Zerlegungssatz)

Wenn $(q, w, Z_{1\dots k}) \rightarrow_M^n (q', \epsilon, \epsilon)$

Satz 3.53 (Zerlegungssatz)

Wenn $(q, w, Z_{1\dots k}) \rightarrow_M^n (q', \epsilon, \epsilon)$ dann gibt es u_i, p_i, n_i , so dass

$$(p_{i-1}, u_i, Z_i) \rightarrow_M^{n_i} (p_i, \epsilon, \epsilon) \quad (i = 1, \dots, k)$$

und $w = u_{1\dots k}$.

Satz 3.53 (Zerlegungssatz)

Wenn $(q, w, Z_{1\dots k}) \rightarrow_M^n (q', \epsilon, \epsilon)$ dann gibt es u_i, p_i, n_i , so dass

$$(p_{i-1}, u_i, Z_i) \rightarrow_M^{n_i} (p_i, \epsilon, \epsilon) \quad (i = 1, \dots, k)$$

und $w = u_{1\dots k}$, $p_0 = q$, $p_k = q'$, $\sum n_i = n$.

Satz 3.53 (Zerlegungssatz)

Wenn $(q, w, Z_{1\dots k}) \rightarrow_M^n (q', \epsilon, \epsilon)$ dann gibt es u_i, p_i, n_i , so dass

$$(p_{i-1}, u_i, Z_i) \rightarrow_M^{n_i} (p_i, \epsilon, \epsilon) \quad (i = 1, \dots, k)$$

und $w = u_{1\dots k}$, $p_0 = q$, $p_k = q'$, $\sum n_i = n$.

Beweis: Mit Induktion über n .

Satz 3.53 (Zerlegungssatz)

Wenn $(q, w, Z_{1\dots k}) \rightarrow_M^n (q', \epsilon, \epsilon)$ dann gibt es u_i, p_i, n_i , so dass

$$(p_{i-1}, u_i, Z_i) \rightarrow_M^{n_i} (p_i, \epsilon, \epsilon) \quad (i = 1, \dots, k)$$

und $w = u_{1\dots k}$, $p_0 = q$, $p_k = q'$, $\sum n_i = n$.

Beweis: Mit Induktion über n . Basis trivial.

Satz 3.53 (Zerlegungssatz)

Wenn $(q, w, Z_{1\dots k}) \rightarrow_M^n (q', \epsilon, \epsilon)$ dann gibt es u_i, p_i, n_i , so dass

$$(p_{i-1}, u_i, Z_i) \rightarrow_M^{n_i} (p_i, \epsilon, \epsilon) \quad (i = 1, \dots, k)$$

und $w = u_{1\dots k}$, $p_0 = q$, $p_k = q'$, $\sum n_i = n$.

Beweis: Mit Induktion über n . Basis trivial.

Schritt: Eine Berechnung der Länge $n + 1$ hat die Form

$$(q, bw', Z_{1\dots k}) \rightarrow_M (p, w', Y_{1\dots l} Z_{2\dots k}) \rightarrow_M^n (q', \epsilon, \epsilon)$$

Satz 3.53 (Zerlegungssatz)

Wenn $(q, w, Z_{1\dots k}) \rightarrow_M^n (q', \epsilon, \epsilon)$ dann gibt es u_i, p_i, n_i , so dass

$$(p_{i-1}, u_i, Z_i) \rightarrow_M^{n_i} (p_i, \epsilon, \epsilon) \quad (i = 1, \dots, k)$$

und $w = u_{1\dots k}$, $p_0 = q$, $p_k = q'$, $\sum n_i = n$.

Beweis: Mit Induktion über n . Basis trivial.

Schritt: Eine Berechnung der Länge $n + 1$ hat die Form

$$(q, bw', Z_{1\dots k}) \rightarrow_M (p, w', Y_{1\dots l} Z_{2\dots k}) \rightarrow_M^n (q', \epsilon, \epsilon)$$

IA $\Rightarrow \exists v_j, r_j, m_j$ ($j = 1, \dots, l$), $\exists u_i, p_i, n_i$ ($i = 2, \dots, k$) mit

$$(r_{j-1}, v_j, Y_j) \rightarrow_M^{m_j} (r_j, \epsilon, \epsilon) \quad (p_{i-1}, u_i, Z_i) \rightarrow_M^{n_i} (p_i, \epsilon, \epsilon)$$

Satz 3.53 (Zerlegungssatz)

Wenn $(q, w, Z_{1\dots k}) \rightarrow_M^n (q', \epsilon, \epsilon)$ dann gibt es u_i, p_i, n_i , so dass

$$(p_{i-1}, u_i, Z_i) \rightarrow_M^{n_i} (p_i, \epsilon, \epsilon) \quad (i = 1, \dots, k)$$

und $w = u_{1\dots k}$, $p_0 = q$, $p_k = q'$, $\sum n_i = n$.

Beweis: Mit Induktion über n . Basis trivial.

Schritt: Eine Berechnung der Länge $n + 1$ hat die Form

$$(q, bw', Z_{1\dots k}) \rightarrow_M (p, w', Y_{1\dots l} Z_{2\dots k}) \rightarrow_M^n (q', \epsilon, \epsilon)$$

IA $\Rightarrow \exists v_j, r_j, m_j$ ($j = 1, \dots, l$), $\exists u_i, p_i, n_i$ ($i = 2, \dots, k$) mit

$$(r_{j-1}, v_j, Y_j) \rightarrow_M^{m_j} (r_j, \epsilon, \epsilon) \quad (p_{i-1}, u_i, Z_i) \rightarrow_M^{n_i} (p_i, \epsilon, \epsilon)$$

und $w' = v_{1\dots l} u_{2\dots k}$,

Satz 3.53 (Zerlegungssatz)

Wenn $(q, w, Z_{1\dots k}) \rightarrow_M^n (q', \epsilon, \epsilon)$ dann gibt es u_i, p_i, n_i , so dass

$$(p_{i-1}, u_i, Z_i) \rightarrow_M^{n_i} (p_i, \epsilon, \epsilon) \quad (i = 1, \dots, k)$$

und $w = u_{1\dots k}$, $p_0 = q$, $p_k = q'$, $\sum n_i = n$.

Beweis: Mit Induktion über n . Basis trivial.

Schritt: Eine Berechnung der Länge $n + 1$ hat die Form

$$(q, bw', Z_{1\dots k}) \rightarrow_M (p, w', Y_{1\dots l} Z_{2\dots k}) \rightarrow_M^n (q', \epsilon, \epsilon)$$

IA $\Rightarrow \exists v_j, r_j, m_j$ ($j = 1, \dots, l$), $\exists u_i, p_i, n_i$ ($i = 2, \dots, k$) mit

$$(r_{j-1}, v_j, Y_j) \rightarrow_M^{m_j} (r_j, \epsilon, \epsilon) \quad (p_{i-1}, u_i, Z_i) \rightarrow_M^{n_i} (p_i, \epsilon, \epsilon)$$

und $w' = v_{1\dots l} u_{2\dots k}$, $r_0 = p$, $r_l = p_1$, $p_k = q'$, $\sum m_j + \sum n_i = n$.

Satz 3.53 (Zerlegungssatz)

Wenn $(q, w, Z_{1\dots k}) \rightarrow_M^n (q', \epsilon, \epsilon)$ dann gibt es u_i, p_i, n_i , so dass

$$(p_{i-1}, u_i, Z_i) \rightarrow_M^{n_i} (p_i, \epsilon, \epsilon) \quad (i = 1, \dots, k)$$

und $w = u_{1\dots k}$, $p_0 = q$, $p_k = q'$, $\sum n_i = n$.

Beweis: Mit Induktion über n . Basis trivial.

Schritt: Eine Berechnung der Länge $n + 1$ hat die Form

$$(q, bw', Z_{1\dots k}) \rightarrow_M (p, w', Y_{1\dots l} Z_{2\dots k}) \rightarrow_M^n (q', \epsilon, \epsilon)$$

IA $\Rightarrow \exists v_j, r_j, m_j$ ($j = 1, \dots, l$), $\exists u_i, p_i, n_i$ ($i = 2, \dots, k$) mit

$$(r_{j-1}, v_j, Y_j) \rightarrow_M^{m_j} (r_j, \epsilon, \epsilon) \quad (p_{i-1}, u_i, Z_i) \rightarrow_M^{n_i} (p_i, \epsilon, \epsilon)$$

und $w' = v_{1\dots l} u_{2\dots k}$, $r_0 = p$, $r_l = p_1$, $p_k = q'$, $\sum m_j + \sum n_i = n$.

Mit Erweiterungslemma: $(r_{j-1}, v_j, Y_j) \rightarrow_M^{m_j} (r_j, v_{j+1\dots l}, Y_{j+1\dots l})$

Satz 3.53 (Zerlegungssatz)

Wenn $(q, w, Z_{1\dots k}) \rightarrow_M^n (q', \epsilon, \epsilon)$ dann gibt es u_i, p_i, n_i , so dass

$$(p_{i-1}, u_i, Z_i) \rightarrow_M^{n_i} (p_i, \epsilon, \epsilon) \quad (i = 1, \dots, k)$$

und $w = u_{1\dots k}$, $p_0 = q$, $p_k = q'$, $\sum n_i = n$.

Beweis: Mit Induktion über n . Basis trivial.

Schritt: Eine Berechnung der Länge $n + 1$ hat die Form

$$(q, bw', Z_{1\dots k}) \rightarrow_M (p, w', Y_{1\dots l} Z_{2\dots k}) \rightarrow_M^n (q', \epsilon, \epsilon)$$

IA $\Rightarrow \exists v_j, r_j, m_j$ ($j = 1, \dots, l$), $\exists u_i, p_i, n_i$ ($i = 2, \dots, k$) mit

$$(r_{j-1}, v_j, Y_j) \rightarrow_M^{m_j} (r_j, \epsilon, \epsilon) \quad (p_{i-1}, u_i, Z_i) \rightarrow_M^{n_i} (p_i, \epsilon, \epsilon)$$

und $w' = v_{1\dots l} u_{2\dots k}$, $r_0 = p$, $r_l = p_1$, $p_k = q'$, $\sum m_j + \sum n_i = n$.

Mit Erweiterungslemma: $(r_{j-1}, v_{j\dots l}, Y_{j\dots l}) \rightarrow_M^{m_j} (r_j, v_{j+1\dots l}, Y_{j+1\dots l})$

$\Rightarrow (r_0, v_{1\dots l}, Y_{1\dots l}) \rightarrow_M^{n_1-1} (r_l, \epsilon, \epsilon)$ wobei $n_1 := 1 + \sum m_j$.

Satz 3.53 (Zerlegungssatz)

Wenn $(q, w, Z_{1\dots k}) \rightarrow_M^n (q', \epsilon, \epsilon)$ dann gibt es u_i, p_i, n_i , so dass

$$(p_{i-1}, u_i, Z_i) \rightarrow_M^{n_i} (p_i, \epsilon, \epsilon) \quad (i = 1, \dots, k)$$

und $w = u_{1\dots k}$, $p_0 = q$, $p_k = q'$, $\sum n_i = n$.

Beweis: Mit Induktion über n . Basis trivial.

Schritt: Eine Berechnung der Länge $n + 1$ hat die Form

$$(q, bw', Z_{1\dots k}) \rightarrow_M (p, w', Y_{1\dots l} Z_{2\dots k}) \rightarrow_M^n (q', \epsilon, \epsilon)$$

IA $\Rightarrow \exists v_j, r_j, m_j$ ($j = 1, \dots, l$), $\exists u_i, p_i, n_i$ ($i = 2, \dots, k$) mit

$$(r_{j-1}, v_j, Y_j) \rightarrow_M^{m_j} (r_j, \epsilon, \epsilon) \quad (p_{i-1}, u_i, Z_i) \rightarrow_M^{n_i} (p_i, \epsilon, \epsilon)$$

und $w' = v_{1\dots l} u_{2\dots k}$, $r_0 = p$, $r_l = p_1$, $p_k = q'$, $\sum m_j + \sum n_i = n$.

Mit Erweiterungslemma: $(r_{j-1}, v_{j\dots l}, Y_{j\dots l}) \rightarrow_M^{m_j} (r_j, v_{j+1\dots l}, Y_{j+1\dots l})$

$\Rightarrow (r_0, v_{1\dots l}, Y_{1\dots l}) \rightarrow_M^{n_1-1} (r_l, \epsilon, \epsilon)$ wobei $n_1 := 1 + \sum m_j$.

Aus $(q, bv_{1\dots l}, Z_1) \rightarrow_M (p, v_{1\dots l}, Y_{1\dots l})$ folgt $(p_0, u_1, Z_1) \rightarrow_M^{n_1} (p_1, \epsilon, \epsilon)$ wobei $p_0 := q$, $u_1 := bv_{1\dots l}$, $p_1 := r_l$.

Satz 3.53 (Zerlegungssatz)

Wenn $(q, w, Z_{1\dots k}) \rightarrow_M^n (q', \epsilon, \epsilon)$ dann gibt es u_i, p_i, n_i , so dass

$$(p_{i-1}, u_i, Z_i) \rightarrow_M^{n_i} (p_i, \epsilon, \epsilon) \quad (i = 1, \dots, k)$$

und $w = u_{1\dots k}$, $p_0 = q$, $p_k = q'$, $\sum n_i = n$.

Beweis: Mit Induktion über n . Basis trivial.

Schritt: Eine Berechnung der Länge $n + 1$ hat die Form

$$(q, bw', Z_{1\dots k}) \rightarrow_M (p, w', Y_{1\dots l} Z_{2\dots k}) \rightarrow_M^n (q', \epsilon, \epsilon)$$

IA $\Rightarrow \exists v_j, r_j, m_j$ ($j = 1, \dots, l$), $\exists u_i, p_i, n_i$ ($i = 2, \dots, k$) mit

$$(r_{j-1}, v_j, Y_j) \rightarrow_M^{m_j} (r_j, \epsilon, \epsilon) \quad (p_{i-1}, u_i, Z_i) \rightarrow_M^{n_i} (p_i, \epsilon, \epsilon)$$

und $w' = v_{1\dots l} u_{2\dots k}$, $r_0 = p$, $r_l = p_1$, $p_k = q'$, $\sum m_j + \sum n_i = n$.

Mit Erweiterungslemma: $(r_{j-1}, v_{j\dots l}, Y_{j\dots l}) \rightarrow_M^{m_j} (r_j, v_{j+1\dots l}, Y_{j+1\dots l})$

$\Rightarrow (r_0, v_{1\dots l}, Y_{1\dots l}) \rightarrow_M^{n_1-1} (r_l, \epsilon, \epsilon)$ wobei $n_1 := 1 + \sum m_j$.

Aus $(q, bv_{1\dots l}, Z_1) \rightarrow_M (p, v_{1\dots l}, Y_{1\dots l})$ folgt $(p_0, u_1, Z_1) \rightarrow_M^{n_1} (p_1, \epsilon, \epsilon)$ wobei $p_0 := q$, $u_1 := bv_{1\dots l}$, $p_1 := r_l$.

Damit auch $w = bw' = bv_{1\dots l} u_{2\dots k} = u_{1\dots k}$ und $\sum n_i = n + 1$. \square

Satz 3.53 (Zerlegungssatz)

Wenn $(q, w, Z_{1\dots k}) \rightarrow_M^n (q', \epsilon, \epsilon)$ dann gibt es u_i, p_i, n_i , so dass

$$(p_{i-1}, u_i, Z_i) \rightarrow_M^{n_i} (p_i, \epsilon, \epsilon) \quad (i = 1, \dots, k)$$

und $w = u_{1\dots k}$, $p_0 = q$, $p_k = q'$, $\sum n_i = n$.

Beweis: Mit Induktion über n . Basis trivial.

Schritt: Eine Berechnung der Länge $n + 1$ hat die Form

$$(q, bw', Z_{1\dots k}) \rightarrow_M (p, w', Y_{1\dots l} Z_{2\dots k}) \rightarrow_M^n (q', \epsilon, \epsilon)$$

IA $\Rightarrow \exists v_j, r_j, m_j$ ($j = 1, \dots, l$), $\exists u_i, p_i, n_i$ ($i = 2, \dots, k$) mit

$$(r_{j-1}, v_j, Y_j) \rightarrow_M^{m_j} (r_j, \epsilon, \epsilon) \quad (p_{i-1}, u_i, Z_i) \rightarrow_M^{n_i} (p_i, \epsilon, \epsilon)$$

und $w' = v_{1\dots l} u_{2\dots k}$, $r_0 = p$, $r_l = p_1$, $p_k = q'$, $\sum m_j + \sum n_i = n$.

Mit Erweiterungslemma: $(r_{j-1}, v_{j\dots l}, Y_{j\dots l}) \rightarrow_M^{m_j} (r_j, v_{j+1\dots l}, Y_{j+1\dots l})$

$\Rightarrow (r_0, v_{1\dots l}, Y_{1\dots l}) \rightarrow_M^{n_1-1} (r_l, \epsilon, \epsilon)$ wobei $n_1 := 1 + \sum m_j$.

Aus $(q, bv_{1\dots l}, Z_1) \rightarrow_M (p, v_{1\dots l}, Y_{1\dots l})$ folgt $(p_0, u_1, Z_1) \rightarrow_M^{n_1} (p_1, \epsilon, \epsilon)$ wobei $p_0 := q$, $u_1 := bv_{1\dots l}$, $p_1 := r_l$.

Damit auch $w = bw' = bv_{1\dots l} u_{2\dots k} = u_{1\dots k}$ und $\sum n_i = n + 1$. \square

3.9 Äquivalenz von PDAs und CFGs

Satz 3.54 (CFG \rightarrow PDA)

Zu jeder CFG G kann man einen PDA M konstruieren, der mit leerem Stack akzeptiert, so dass

$$L_\epsilon(M) = L(G).$$

3.9 Äquivalenz von PDAs und CFGs

Satz 3.54 (CFG \rightarrow PDA)

Zu jeder CFG G kann man einen PDA M konstruieren, der mit leerem Stack akzeptiert, so dass

$$L_\epsilon(M) = L(G).$$

Konstruktion:

Zuerst bringen wir alle Produktionen von G in die Form

$$A \rightarrow bB_1 \dots B_k$$

wobei $b \in \Sigma \cup \{\epsilon\}$.

3.9 Äquivalenz von PDAs und CFGs

Satz 3.54 (CFG \rightarrow PDA)

Zu jeder CFG G kann man einen PDA M konstruieren, der mit leerem Stack akzeptiert, so dass

$$L_\epsilon(M) = L(G).$$

Konstruktion:

Zuerst bringen wir alle Produktionen von G in die Form

$$A \rightarrow bB_1 \dots B_k$$

wobei $b \in \Sigma \cup \{\epsilon\}$. Methode: Für jedes $a \in \Sigma$

- 1 füge ein neues A_a zu V hinzu,

3.9 Äquivalenz von PDAs und CFGs

Satz 3.54 (CFG \rightarrow PDA)

Zu jeder CFG G kann man einen PDA M konstruieren, der mit leerem Stack akzeptiert, so dass

$$L_\epsilon(M) = L(G).$$

Konstruktion:

Zuerst bringen wir alle Produktionen von G in die Form

$$A \rightarrow bB_1 \dots B_k$$

wobei $b \in \Sigma \cup \{\epsilon\}$. Methode: Für jedes $a \in \Sigma$

- 1 füge ein neues A_a zu V hinzu,
- 2 ersetze a rechts in P durch A_a (außer am Kopfende),
- 3 füge eine neue Produktion $A_a \rightarrow a$ hinzu.

Alle Produktionen in $G = (V, \Sigma, P, S)$ haben jetzt die Form

$$A \rightarrow bB_1 \dots B_k$$

Der PDA wird wie folgt definiert:

$$M := (\{q\})$$

Alle Produktionen in $G = (V, \Sigma, P, S)$ haben jetzt die Form

$$A \rightarrow bB_1 \dots B_k$$

Der PDA wird wie folgt definiert:

$$M := (\{q\}, \Sigma, V, q, S)$$

Alle Produktionen in $G = (V, \Sigma, P, S)$ haben jetzt die Form

$$A \rightarrow bB_1 \dots B_k$$

Der PDA wird wie folgt definiert:

$$M := (\{q\}, \Sigma, V, q, S, \delta)$$

wobei

$$(A \rightarrow b\beta) \in P \implies \delta(q, b, A) \ni (q, \beta)$$

Alle Produktionen in $G = (V, \Sigma, P, S)$ haben jetzt die Form

$$A \rightarrow bB_1 \dots B_k$$

Der PDA wird wie folgt definiert:

$$M := (\{q\}, \Sigma, V, q, S, \delta)$$

wobei

$$(A \rightarrow b\beta) \in P \implies \delta(q, b, A) \ni (q, \beta)$$

also für alle $b \in \Sigma \cup \{\epsilon\}$ und $A \in V$:

$$\delta(q, b, A) := \{(q, \beta) \mid (A \rightarrow b\beta) \in P\}$$

Alle Produktionen in $G = (V, \Sigma, P, S)$ haben jetzt die Form

$$A \rightarrow bB_1 \dots B_k$$

Der PDA wird wie folgt definiert:

$$M := (\{q\}, \Sigma, V, q, S, \delta)$$

wobei

$$(A \rightarrow b\beta) \in P \implies \delta(q, b, A) \ni (q, \beta)$$

also für alle $b \in \Sigma \cup \{\epsilon\}$ und $A \in V$:

$$\delta(q, b, A) := \{(q, \beta) \mid (A \rightarrow b\beta) \in P\}$$

Lemma 3.55

Für alle $u, v \in \Sigma^*$ und $\gamma \in V^*$ und $A \in V$ gilt:

$$A \xrightarrow{G}^n u\gamma \text{ mit Linksableitung gdw } (q, uv, A) \xrightarrow{M}^n (q, v, \gamma)$$

Beweis:

Mit Induktion über n . Basis $n = 0$ trivial. Schritt:

Lemma 3.55

Für alle $u, v \in \Sigma^*$ und $\gamma \in V^*$ und $A \in V$ gilt:

$$A \xrightarrow{G}^n u\gamma \text{ mit Linksableitung gdw } (q, uv, A) \xrightarrow{M}^n (q, v, \gamma)$$

Beweis:

Mit Induktion über n . Basis $n = 0$ trivial. Schritt:

$$A \xrightarrow{G}^{n+1} u\gamma$$

Lemma 3.55

Für alle $u, v \in \Sigma^*$ und $\gamma \in V^*$ und $A \in V$ gilt:

$$A \xrightarrow{G}^n u\gamma \text{ mit Linksableitung gdw } (q, uv, A) \xrightarrow{M}^n (q, v, \gamma)$$

Beweis:

Mit Induktion über n . Basis $n = 0$ trivial. Schritt:

$$A \xrightarrow{G}^{n+1} u\gamma$$

\Leftrightarrow

$$\exists (B \rightarrow b\beta) \in P, w, \alpha. A \xrightarrow{G}^n wB\alpha \rightarrow_G \boxed{wb}\beta\alpha = \boxed{u}\gamma$$

Lemma 3.55

Für alle $u, v \in \Sigma^*$ und $\gamma \in V^*$ und $A \in V$ gilt:

$$A \rightarrow_G^n u\gamma \text{ mit Linksableitung gdw } (q, uv, A) \rightarrow_M^n (q, v, \gamma)$$

Beweis:

Mit Induktion über n . Basis $n = 0$ trivial. Schritt:

$$\begin{aligned}
& A \rightarrow_G^{n+1} u\gamma \\
& \Leftrightarrow \\
& \exists (B \rightarrow b\beta) \in P, w, \alpha. A \rightarrow_G^n wB\alpha \rightarrow_G wb\beta\alpha = u\gamma \\
& \quad \quad \quad (\text{dh } wb = u, \beta\alpha = \gamma) \\
& \Leftrightarrow \\
& (q, wb\beta, A) \rightarrow_M^n (q, b\beta, B\alpha) \wedge (q, b\beta, B\alpha) \rightarrow_M (q, \beta, \beta\alpha)
\end{aligned}$$

Lemma 3.55

Für alle $u, v \in \Sigma^*$ und $\gamma \in V^*$ und $A \in V$ gilt:

$$A \rightarrow_G^n u\gamma \text{ mit Linksableitung gdw } (q, uv, A) \rightarrow_M^n (q, v, \gamma)$$

Beweis:

Mit Induktion über n . Basis $n = 0$ trivial. Schritt:

$$\begin{aligned}
& A \rightarrow_G^{n+1} u\gamma \\
& \Leftrightarrow \\
& \exists (B \rightarrow b\beta) \in P, w, \alpha. A \rightarrow_G^n wB\alpha \rightarrow_G wb\beta\alpha = u\gamma \\
& \quad \quad \quad (\text{dh } wb = u, \beta\alpha = \gamma) \\
& \Leftrightarrow \\
& (q, wbv, A) \rightarrow_M^n (q, bv, B\alpha) \wedge (q, bv, B\alpha) \rightarrow_M (q, v, \beta\alpha) \\
& \Leftrightarrow \\
& (q, uv, A) \rightarrow_M^{n+1} (q, v, \gamma)
\end{aligned}$$

□

$$A \rightarrow_G^n u\gamma \text{ mit Linksableitung gdw } (q, uv, A) \rightarrow_M^n (q, v, \gamma)$$

Satz 3.56

$$L(G) = L_\epsilon(M)$$

$$A \rightarrow_G^n u\gamma \text{ mit Linksableitung gdw } (q, uv, A) \rightarrow_M^n (q, v, \gamma)$$

Satz 3.56

$$L(G) = L_\epsilon(M)$$

Beweis:

$$u \in L(G)$$

$$\Leftrightarrow S \rightarrow_G^* u \text{ mit Linksableitung}$$

$A \rightarrow_G^n u\gamma$ mit Linksableitung gdw $(q, uv, A) \rightarrow_M^n (q, v, \gamma)$

Satz 3.56

$$L(G) = L_\epsilon(M)$$

Beweis:

$u \in L(G)$

$\Leftrightarrow S \rightarrow_G^* u$ mit Linksableitung

$\leadsto \gamma = \Sigma$

$\Leftrightarrow (q, u, S) \rightarrow_M^* (q, \epsilon, \epsilon)$

$A \rightarrow_G^n u\gamma$ mit Linksableitung gdw $(q, uv, A) \rightarrow_M^n (q, v, \gamma)$

Satz 3.56

$$L(G) = L_\epsilon(M)$$

Beweis:

$u \in L(G)$

$\Leftrightarrow S \rightarrow_G^* u$ mit Linksableitung

$\Leftrightarrow (q, u, S) \rightarrow_M^* (q, \epsilon, \epsilon)$

$\Leftrightarrow u \in L_\epsilon(M)$

□

Satz 3.57 (PDA \rightarrow CFG)

Zu jedem PDA $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta)$, der mit leerem Keller akzeptiert, kann man eine CFG G konstruieren mit $L(G) = L_\epsilon(M)$.

Satz 3.57 (PDA \rightarrow CFG)

Zu jedem PDA $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta)$, der mit leerem Keller akzeptiert, kann man eine CFG G konstruieren mit $L(G) = L_\epsilon(M)$.

Konstruktion: $G := (V, \Sigma, P, S)$ mit

$V := Q \times \Gamma \times Q \cup \{S\}$ wobei wir die Tripel mit $[\cdot, \cdot, \cdot]$ notieren

$\uparrow \uparrow \uparrow$

Satz 3.57 (PDA \rightarrow CFG)

Zu jedem PDA $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta)$, der mit leerem Keller akzeptiert, kann man eine CFG G konstruieren mit $L(G) = L_\epsilon(M)$.

Konstruktion: $G := (V, \Sigma, P, S)$ mit

$V := Q \times \Gamma \times Q \cup \{S\}$ wobei wir die Tripel mit $[\cdot, \cdot, \cdot]$ notieren und P die folgenden Produktionen enthält:

$$[q_1, A, q_2]$$

Satz 3.57 (PDA \rightarrow CFG)

Zu jedem PDA $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta)$, der mit leerem Keller akzeptiert, kann man eine CFG G konstruieren mit $L(G) = L_\epsilon(M)$.

Konstruktion: $G := (V, \Sigma, P, S)$ mit

$V := Q \times \Gamma \times Q \cup \{S\}$ wobei wir die Tripel mit $[\cdot, \cdot, \cdot]$ notieren und P die folgenden Produktionen enthält:

- $S \rightarrow [q_0, Z_0, q]$ für alle $q \in Q$



Satz 3.57 (PDA \rightarrow CFG)

Zu jedem PDA $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta)$, der mit leerem Keller akzeptiert, kann man eine CFG G konstruieren mit $L(G) = L_\epsilon(M)$.

Konstruktion: $G := (V, \Sigma, P, S)$ mit

$V := Q \times \Gamma \times Q \cup \{S\}$ wobei wir die Tripel mit $[\cdot, \cdot, \cdot]$ notieren und P die folgenden Produktionen enthält:

- $S \rightarrow [q_0, Z_0, q]$ für alle $q \in Q$
- Für alle $\delta(q, b, Z) \ni (r_0, Z_1 \dots Z_k)$

$$[q, Z, p] \rightarrow b[r_0, Z_1, r_1][r_1, Z_2, r_2] \dots [r_{k-1}, Z_k, r_k]$$

Satz 3.57 (PDA \rightarrow CFG)

Zu jedem PDA $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta)$, der mit leerem Keller akzeptiert, kann man eine CFG G konstruieren mit $L(G) = L_\epsilon(M)$.

Konstruktion: $G := (V, \Sigma, P, S)$ mit

$V := Q \times \Gamma \times Q \cup \{S\}$ wobei wir die Tripel mit $[\cdot, \cdot, \cdot]$ notieren und P die folgenden Produktionen enthält:

- $S \rightarrow [q_0, Z_0, q]$ für alle $q \in Q$
- Für alle $\delta(q, b, Z) \ni (r_0, Z_1 \dots Z_k)$ und für alle $r_1, \dots, r_k \in Q$:

$$[q, Z, r_k] \rightarrow b[r_0, Z_1, r_1][r_1, Z_2, r_2] \dots [r_{k-1}, Z_k, r_k]$$

Satz 3.57 (PDA \rightarrow CFG)

Zu jedem PDA $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta)$, der mit leerem Keller akzeptiert, kann man eine CFG G konstruieren mit $L(G) = L_\epsilon(M)$.

Konstruktion: $G := (V, \Sigma, P, S)$ mit

$V := Q \times \Gamma \times Q \cup \{S\}$ wobei wir die Tripel mit $[\cdot, \cdot, \cdot]$ notieren

und P die folgenden Produktionen enthält:

- $S \rightarrow [q_0, Z_0, q]$ für alle $q \in Q$
- Für alle $\delta(q, b, Z) \ni (r_0, Z_1 \dots Z_k)$ und für alle $r_1, \dots, r_k \in Q$:

$$[q, Z, r_k] \rightarrow b[r_0, Z_1, r_1][r_1, Z_2, r_2] \dots [r_{k-1}, Z_k, r_k]$$