Script **generated by TTT**

Title: Seidl: Theoretische_Informatik (02.05.2013)

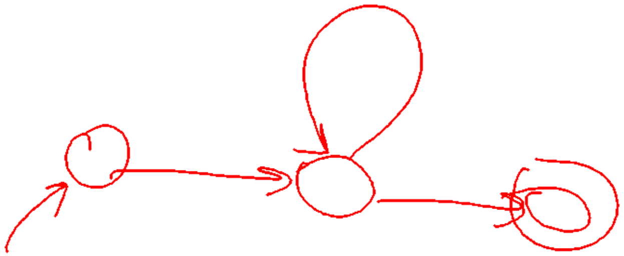
Date: Thu May 02 16:02:02 CEST 2013

Duration: 86:53 min

Pages: 86

Lemma 2.38

Für endliche Automaten ist das Endlichkeitsproblem entscheidbar.



Lemma 2.38

Für endliche Automaten ist das Endlichkeitsproblem entscheidbar.

Beweis:

$|L(M)| = \infty$ gdw von q_0 aus eine nicht-leere Schleife erreichbar ist, von der aus F erreichbar ist:

$finite(Q, \Sigma, \delta, q_0, F) =$

Lemma 2.38

Für endliche Automaten ist das Endlichkeitsproblem entscheidbar.

Beweis:

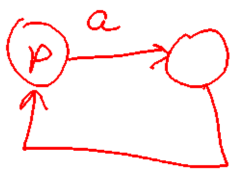
$|L(M)| = \infty$ gdw von q_0 aus eine nicht-leere Schleife erreichbar ist, von der aus F erreichbar ist:

$finite(Q, \Sigma, \delta, q_0, F) =$
$\quad R := Reach(\{q_0\})$

Lemma 2.38

Für endliche Automaten ist das Endlichkeitsproblem entscheidbar.

Beweis:
$|L(M)| = \infty$ gdw von q_0 aus eine nicht-leere Schleife erreichbar ist, von der aus F erreichbar ist:



$finite(Q, \Sigma, \delta, q_0, F) =$
$\quad R := Reach(\{q_0\})$
$\quad C := \{p \in R \mid p \in Reach(\bigcup_{a \in \Sigma} \delta(p, a))\}$

Lemma 2.38

Für endliche Automaten ist das Endlichkeitsproblem entscheidbar.

Beweis:
$|L(M)| = \infty$ gdw von q_0 aus eine nicht-leere Schleife erreichbar ist, von der aus F erreichbar ist:

$finite(Q, \Sigma, \delta, q_0, F) =$
$\quad R := Reach(\{q_0\})$
$\quad C := \{p \in R \mid p \in Reach(\bigcup_{a \in \Sigma} \delta(p, a))\}$
$\quad$ **return** $(Reach(C) \cap F = \emptyset)$

□

Definition 2.39

Seien D_1 und D_2 Sprachbeschreibungen (DFAs, NFAs, REs, Grammatiken, etc).

Äquivalenzproblem: Gilt $L(D_1) = L(D_2)$?

Definition 2.39

Seien D_1 und D_2 Sprachbeschreibungen (DFAs, NFAs, REs, Grammatiken, etc).

Äquivalenzproblem: Gilt $L(D_1) = L(D_2)$?

Definition 2.39

Seien D_1 und D_2 Sprachbeschreibungen (DFAs, NFAs, REs, Grammatiken, etc).

Äquivalenzproblem: Gilt $L(D_1) = L(D_2)$?

Lemma 2.40

Das Äquivalenzproblem ist für DFAs entscheidbar.

Definition 2.39

Seien D_1 und D_2 Sprachbeschreibungen (DFAs, NFAs, REs, Grammatiken, etc).

Äquivalenzproblem: Gilt $L(D_1) = L(D_2)$?

Lemma 2.40

Das Äquivalenzproblem ist für DFAs entscheidbar.

Beweis:

Folgt direkt aus

$$L_1 \subseteq L_2 \quad \Leftrightarrow \quad L_1 \cap \overline{L_2} = \emptyset$$

Definition 2.39

Seien D_1 und D_2 Sprachbeschreibungen (DFAs, NFAs, REs, Grammatiken, etc).

Äquivalenzproblem: Gilt $L(D_1) = L(D_2)$?

Lemma 2.40

Das Äquivalenzproblem ist für DFAs entscheidbar.

Beweis:

Folgt direkt aus

$$\begin{aligned} L_1 \subseteq L_2 \quad &\Leftrightarrow \quad L_1 \cap \overline{L_2} = \emptyset \\ L_1 = L_2 \quad &\Leftrightarrow \quad L_1 \subseteq L_2 \wedge L_2 \subseteq L_1 \end{aligned}$$

Definition 2.39

Seien D_1 und D_2 Sprachbeschreibungen (DFAs, NFAs, REs, Grammatiken, etc).

Äquivalenzproblem: Gilt $L(D_1) = L(D_2)$?

Lemma 2.40

Das Äquivalenzproblem ist für DFAs entscheidbar.

Beweis:

Folgt direkt aus

$$\begin{aligned} L_1 \subseteq L_2 \quad &\Leftrightarrow \quad L_1 \cap \overline{L_2} = \emptyset \\ L_1 = L_2 \quad &\Leftrightarrow \quad L_1 \subseteq L_2 \wedge L_2 \subseteq L_1 \end{aligned}$$

da für DFAs Komplement und Durchschnitt wieder endliche Automaten liefern und das Leerheitsproblem für endliche Automaten entscheidbar ist. □

Satz 2.41

Das Äquivalenzproblem für DFAs ist in Zeit $O(|Q_1||Q_2|)$ entscheidbar

Satz 2.41

Das Äquivalenzproblem für DFAs ist in Zeit $O(|Q_1||Q_2|)$ entscheidbar (bei fixem Σ).

$|\Sigma|$

Satz 2.41

Das Äquivalenzproblem für DFAs ist in Zeit $O(|Q_1||Q_2|)$ entscheidbar (bei fixem Σ).

Beweis:

Gegeben: DFAs M_1 mit m und M_2 mit n Zuständen.
Mit Hilfe der Produkt-Konstruktion für $\cap$ folgt:

	Anzahl der Zustände
$\cancel{L(M_1) \cap \overline{L(M_2)}}$	mn
$\overline{L(M_1)} \cap L(M_2)$	mn

Satz 2.41

Das Äquivalenzproblem für DFAs ist in Zeit $O(|Q_1||Q_2|)$ entscheidbar (bei fixem Σ).

Beweis:

Gegeben: DFAs M_1 mit m und M_2 mit n Zuständen.
Mit Hilfe der Produkt-Konstruktion für $\cap$ folgt:

	Anzahl der Zustände
$L(M_1) \cap \overline{L(M_2)}$	mn
$\overline{L(M_1)} \cap L(M_2)$	mn

Das Leerheitsproblem ist jeweils in Zeit $O(mn)$ entscheidbar. $\square$

Korollar 2.42

Das Äquivalenzproblem für NFAs ist in Zeit $O(2^{|Q_1|+|Q_2|})$ entscheidbar (bei fixem Σ).

Satz 2.41

Das Äquivalenzproblem für DFAs ist in Zeit $O(|Q_1||Q_2|)$ entscheidbar (bei fixem Σ).

Beweis:
Gegeben: DFAs M_1 mit m und M_2 mit n Zuständen.
Mit Hilfe der Produkt-Konstruktion für $\cap$ folgt:

	Anzahl der Zustände	
$L(M_1) \cap \overline{L(M_2)}$	mn	$m \cdot 2^n$
$\overline{L(M_1)} \cap L(M_2)$	mn	$2^m \cdot n$

Das Leerheitsproblem ist jeweils in Zeit $O(mn)$ entscheidbar. □

Korollar 2.42

Das Äquivalenzproblem für NFAs ist in Zeit $O(2^{|Q_1|+|Q_2|})$ entscheidbar (bei fixem Σ).

Korollar 2.42

Das Äquivalenzproblem für NFAs ist in Zeit $O(2^{|Q_1|+|Q_2|})$ entscheidbar (bei fixem Σ).

Beweis: 2 NFAs mit m und n Zuständen $\rightsquigarrow$
2 DFAs mit 2^m und 2^n Zuständen $\rightsquigarrow$
Äquivalenztest in Zeit $O(2^m 2^n)$ $\rightsquigarrow$ $O(m \cdot 2^n + n \cdot 2^m)$

Korollar 2.43

Das Äquivalenzproblem für reguläre Ausdrücke ist entscheidbar.

Fazit:

Die Kodierung der Eingabe (DFA, NFA, RE, ...) kann entscheidend für die Komplexität eines Problems sein.

2.10 Automaten und Gleichungssysteme

Nicht mehr *Beweisen* von Äquivalenzen

Gilt $XX^* \equiv X^*X$ für alle X?

2.10 Automaten und Gleichungssysteme

Nicht mehr *Beweisen* von Äquivalenzen

Gilt $XX^* \equiv X^*X$ für alle X?

sondern *Lösen*:

Für welches X gilt $X \equiv aX \mid b$?

2.10 Automaten und Gleichungssysteme

Nicht mehr *Beweisen* von Äquivalenzen

Gilt $XX^* \equiv X^*X$ für alle X?

sondern *Lösen*:

Für welches X gilt $X \equiv aX \mid b$?

Anwendung:

Automat $\leadsto$ Gleichungssystem $\leadsto$ RE

2.10 Automaten und Gleichungssysteme

Nicht mehr *Beweisen* von Äquivalenzen

$$\text{Gilt } XX^* \equiv X^*X \text{ für alle } X?$$

sondern *Lösen*:

$$\text{Für welches } X \text{ gilt } X \equiv aX \mid b \text{ ?}$$

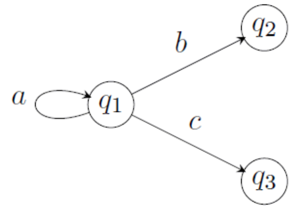
Anwendung:

$$\text{Automat} \rightsquigarrow \text{Gleichungssystem} \rightsquigarrow \text{RE}$$

Technische Vereinfachung: die X_i stehen für (unbekannte) REs.

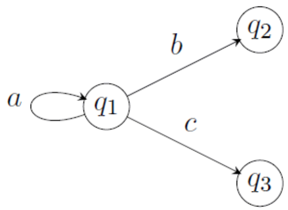
Beispiel 2.44

Ein Automatenfragment:



Beispiel 2.44

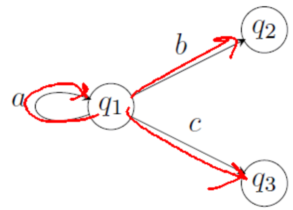
Ein Automatenfragment:



$$L_i := \{w \mid \hat{\delta}(q_i, w) \in F\}$$

Beispiel 2.44

Ein Automatenfragment:



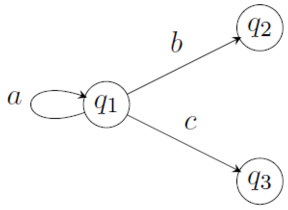
$$L_i := \{w \mid \hat{\delta}(q_i, w) \in F\}$$

$$\Longrightarrow$$

$$L_1 = \boxed{\{a\}L_1} \cup \boxed{\{b\}L_2} \cup \boxed{\{c\}L_3}$$

Beispiel 2.44

Ein Automatenfragment:

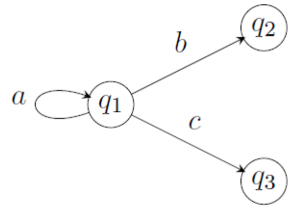


$$L_i := \{w \mid \hat{\delta}(q_i, w) \in F\}$$
$$\Longrightarrow$$
$$L_1 = \{a\}L_1 \cup \{b\}L_2 \cup \{c\}L_3$$

Da die L_i regulär sein müssen(?),

Beispiel 2.44

Ein Automatenfragment:



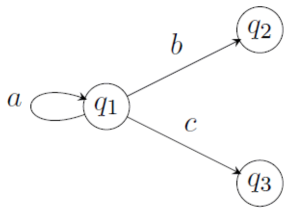
$$L_i := \{w \mid \hat{\delta}(q_i, w) \in F\}$$
$$\Longrightarrow$$
$$L_1 = \{a\}L_1 \cup \{b\}L_2 \cup \{c\}L_3$$

Da die L_i regulär sein müssen(?), arbeiten wir direkt mit REs:

$$X_1 \equiv aX_1 \mid bX_2 \mid cX_3$$

Beispiel 2.44

Ein Automatenfragment:



$$L_i := \{w \mid \hat{\delta}(q_i, w) \in F\}$$
$$\Longrightarrow$$
$$L_1 = \{a\}L_1 \cup \{b\}L_2 \cup \{c\}L_3$$

Da die L_i regulär sein müssen(?), arbeiten wir direkt mit REs:

$$X_1 \equiv aX_1 \mid bX_2 \mid cX_3$$

Lösung X_i ist RE für die von q_i aus akzeptierte Sprache.

Satz 2.45 (Ardens Lemma)

Sind A, B und X Spachen mit $\epsilon \notin A$, so gilt

$$X = AX \cup B \quad \Longrightarrow \quad X = A^*B$$

Satz 2.45 (Ardens Lemma)

Sind A, B und X Spachen mit $\epsilon \notin A$, so gilt

$$X = AX \cup B \quad \Longrightarrow \quad X = A^*B$$

$$A(A^*B) \cup B$$
$$= (AA^*)B \cup \{\varepsilon\} \cdot B$$
$$= (AA^* \cup \{\varepsilon\}) \cdot B$$
$$= A^*B$$

Satz 2.45 (Ardens Lemma)

Sind A, B und X Spachen mit $\epsilon \notin A$, so gilt

$$X = AX \cup B \quad \Longrightarrow \quad X = A^*B$$

Korollar 2.46

Sind α, β und X reguläre Ausdrücke mit $\epsilon \notin L(\alpha)$, so gilt

$$X \equiv \alpha X \mid \beta \quad \Longrightarrow \quad X \equiv \alpha^*\beta$$

Satz 2.45 (Ardens Lemma)

Sind A, B und X Spachen mit $\epsilon \notin A$, so gilt

$$X = AX \cup B \quad \Longrightarrow \quad X = A^*B$$

Korollar 2.46

Sind α, β und X reguläre Ausdrücke mit $\epsilon \notin L(\alpha)$, so gilt

$$X \equiv \alpha X \mid \beta \quad \Longrightarrow \quad X \equiv \alpha^*\beta$$

Bemerkungen

- $X = \{\epsilon\}X \cup B$ hat keine eindeutige Lösung:

Satz 2.45 (Ardens Lemma)

Sind A, B und X Spachen mit $\epsilon \notin A$, so gilt

$$X = AX \cup B \quad \Longrightarrow \quad X = A^*B$$

Korollar 2.46

Sind α, β und X reguläre Ausdrücke mit $\epsilon \notin L(\alpha)$, so gilt

$$X \equiv \alpha X \mid \beta \quad \Longrightarrow \quad X \equiv \alpha^*\beta$$

Bemerkungen

- $X = \{\epsilon\}X \cup B$ hat keine eindeutige Lösung:
  jede Sprache $X \supseteq B$ ist Lösung.

Satz 2.45 (Ardens Lemma)

Sind A, B und X Spachen mit $\epsilon \notin A$, so gilt

$$X = AX \cup B \quad \Longrightarrow \quad X = A^* B$$

Korollar 2.46

Sind α, β und X reguläre Ausdrücke mit $\epsilon \notin L(\alpha)$, so gilt

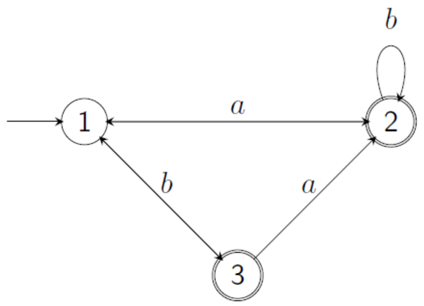
$$X \equiv \alpha X \mid \beta \quad \Longrightarrow \quad X \equiv \alpha^* \beta$$

Bemerkungen

- $X = \{\epsilon\} X \cup B$ hat keine eindeutige Lösung: jede Sprache $X \supseteq B$ ist Lösung.
- $X \equiv aXb \mid \epsilon$ hat keine *reguläre* Lösung.

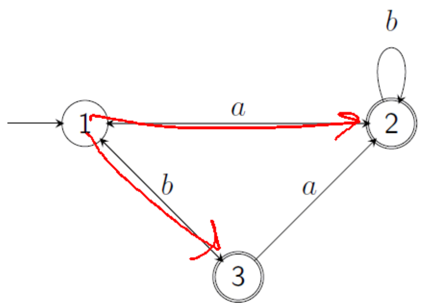
Umwandlung eines DFAs in einen äquivalenten regulären Ausdruck:

Beispiel 2.47



Umwandlung eines DFAs in einen äquivalenten regulären Ausdruck:

Beispiel 2.47



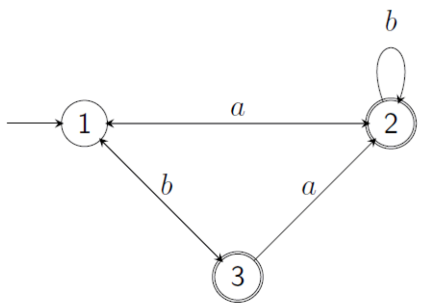
Äquivalentes Gleichungssystem:

X_i ist ein RE für die von q_i aus akzeptierte Sprache.

$$X_1 \equiv$$

Umwandlung eines DFAs in einen äquivalenten regulären Ausdruck:

Beispiel 2.47



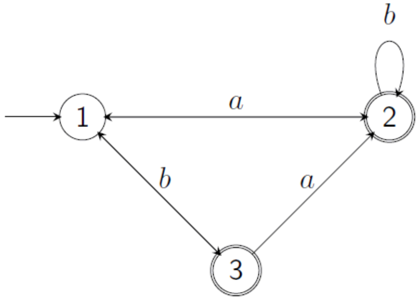
Äquivalentes Gleichungssystem:

X_i ist ein RE für die von q_i aus akzeptierte Sprache.

$$X_1 \equiv aX_2$$

Umwandlung eines DFAs in einen äquivalenten regulären Ausdruck:

Beispiel 2.47



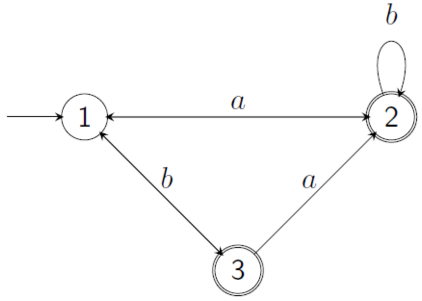
Äquivalentes Gleichungssystem:

X_i ist ein RE für die von q_i aus akzeptierte Sprache.

$$\begin{aligned} X_1 &\equiv aX_2 \mid bX_3 \\ X_2 &\equiv aX_1 \mid bX_2 \end{aligned}$$

Umwandlung eines DFAs in einen äquivalenten regulären Ausdruck:

Beispiel 2.47



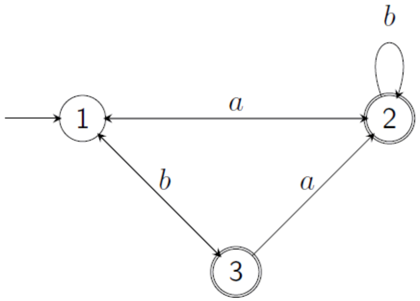
Äquivalentes Gleichungssystem:

X_i ist ein RE für die von q_i aus akzeptierte Sprache.

$$\begin{aligned} X_1 &\equiv aX_2 \mid bX_3 \\ X_2 &\equiv aX_1 \mid bX_2 \mid \epsilon \end{aligned}$$

Umwandlung eines DFAs in einen äquivalenten regulären Ausdruck:

Beispiel 2.47



Äquivalentes Gleichungssystem:

X_i ist ein RE für die von q_i aus akzeptierte Sprache.

$$\begin{aligned} X_1 &\equiv aX_2 \mid bX_3 \\ X_2 &\equiv aX_1 \mid bX_2 \mid \epsilon \\ X_3 &\equiv bX_1 \mid aX_2 \mid \epsilon \end{aligned}$$

Lösen des Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} X_1 &\equiv aX_2 \mid bX_3 \\ X_2 &\equiv aX_1 \mid bX_2 \mid \epsilon \\ X_3 &\equiv bX_1 \mid aX_2 \mid \epsilon \end{aligned}$$

Lösen des Gleichungssystems:

$$
\begin{aligned}
X_1 &\equiv aX_2 \mid bX_3 \\
X_2 &\equiv aX_1 \mid bX_2 \mid \epsilon \\
X_3 &\equiv bX_1 \mid aX_2 \mid \epsilon
\end{aligned}
$$

Löse $X_2 \equiv bX_2 \mid (aX_1 \mid \epsilon)$ nach X_2 auf:

$X_2 = (aa|b)^*(abX_3|\varepsilon)$

$X_2 = a(aX_2|bX_3)|bX_2|\varepsilon$

$X_3 = b(aX_2|bX_3)|aX_2 \quad X_2 (aa|b)^* \varepsilon$

$X_2 = (aa|b)X_2 | (abX_3|\varepsilon)$

$X_3 = (ba|a)X_2 | bbX_3 | \varepsilon$

Lösen des Gleichungssystems:

$$
\begin{aligned}
X_1 &\equiv aX_2 \mid bX_3 \\
X_2 &\equiv aX_1 \mid bX_2 \mid \epsilon \\
X_3 &\equiv bX_1 \mid aX_2 \mid \epsilon
\end{aligned}
$$

Löse $X_2 \equiv bX_2 \mid (aX_1 \mid \epsilon)$ nach X_2 auf:

Umwandlung eines FAs in einen äquivalenten regulären Ausdruck:

- Wandle FA mit n Zuständen in ein System von n Gleichungen mit n Variablen um:

$$X_i \equiv a_{i1}X_1 \mid \cdots \mid a_{in}X_n \mid b_i$$

$$
\begin{aligned}
a_{ij} \; &:= \; c_1 \mid \cdots \mid c_k \quad \text{falls } \{c_1, \ldots, c_k\} = \{c \in \Sigma \mid q_i \xrightarrow{c} q_j\} \\
& \quad\;\; \text{wobei } a_{ij} := \emptyset \text{ falls } q_i \xrightarrow{c} q_j \text{für kein } c \in \Sigma
\end{aligned}
$$

Umwandlung eines FAs in einen äquivalenten regulären Ausdruck:

- Wandle FA mit n Zuständen in ein System von n Gleichungen mit n Variablen um:

$$X_i \equiv a_{i1}X_1 \mid \cdots \mid a_{in}X_n \mid b_i$$

$$
\begin{aligned}
a_{ij} \; &:= \; c_1 \mid \cdots \mid c_k \quad \text{falls } \{c_1, \ldots, c_k\} = \{c \in \Sigma \mid q_i \xrightarrow{c} q_j\} \\
& \quad\;\; \text{wobei } a_{ij} := \emptyset \text{ falls } q_i \xrightarrow{c} q_j \text{für kein } c \in \Sigma
\end{aligned}
$$

$$
b_i \; := \; \begin{cases} \epsilon & \text{falls } q_i \in F \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}
$$

Umwandlung eines FAs in einen äquivalenten regulären Ausdruck:

- Wandle FA mit n Zuständen in ein System von n Gleichungen mit n Variablen um:

$$X_i \equiv a_{i1}X_1 \mid \cdots \mid a_{in}X_n \mid b_i$$

$$\begin{aligned} a_{ij} \quad &:= \quad c_1 \mid \cdots \mid c_k \quad \text{falls } \{c_1, \ldots, c_k\} = \{c \in \Sigma \mid q_i \xrightarrow{c} q_j\} \\ & \text{wobei } a_{ij} := \emptyset \text{ falls } q_i \xrightarrow{c} q_j \text{für kein } c \in \Sigma \end{aligned}$$

$$b_i \quad := \quad \begin{cases} \epsilon & \text{falls } q_i \in F \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$$

- Löse das System durch schrittweise Elimination von Variablen mit Hilfe von Ardens Lemma für REs (Korollar 2.46).
- Ist k der Startzustand, so beschreibt X_k die vom Automaten akzeptierte Sprache.

Das System in Matrix-Schreibweise, mit $+$ statt $|$:

$$x = Ax + b$$

Das System in Matrix-Schreibweise, mit $+$ statt $|$:

$$x = Ax + b$$

Das System in Matrix-Schreibweise, mit $+$ statt $|$:

$$x = Ax + b$$

wobei

$$x = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Das System in Matrix-Schreibweise, mit $+$ statt $|$:

$$x = Ax + b$$

Das System in Matrix-Schreibweise, mit $+$ statt $|$:

$$x = Ax + b$$

wobei

$$x = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Matrix-Addition und Multiplikation sind wie üblich definiert, aber auf der Element-Ebene mit

- REs statt Zahlen,
- Konkatenation statt Multiplikation,
- Alternative statt Addition.

Beispiel 2.48

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aX_1 + bX_2 \\ cX_1 + dX_2 \end{pmatrix}$$

Beispiel 2.48

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aX_1 + bX_2 \\ cX_1 + dX_2 \end{pmatrix}$$

Achtung: Die Einträge in den Matrizen sind beliebige REs!

Beispiel 2.48

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aX_1 + bX_2 \\ cX_1 + dX_2 \end{pmatrix}$$

Achtung: Die Einträge in den Matrizen sind beliebige REs!
Wenn wir + und · auf Matrizen haben, was könnte * sein?

$$X = AX + b$$
$$X = A^* b$$

Beispiel 2.48

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aX_1 + bX_2 \\ cX_1 + dX_2 \end{pmatrix}$$

Achtung: Die Einträge in den Matrizen sind beliebige REs!
Wenn wir + und · auf Matrizen haben, was könnte * sein?

$$A^* := A^0 + A^1 + A^2 + \cdots$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & & & \emptyset \\ & \varepsilon & & \\ & & \varepsilon \ddots & \\ \emptyset & & & \varepsilon \end{pmatrix}$$

Beispiel 2.48

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aX_1 + bX_2 \\ cX_1 + dX_2 \end{pmatrix}$$

Achtung: Die Einträge in den Matrizen sind beliebige REs!
Wenn wir + und · auf Matrizen haben, was könnte * sein?

$$A^* := A^0 + A^1 + A^2 + \cdots$$

Existiert das? Was ist das?

$$A^0 = \begin{pmatrix} a_{ij}^{j} \end{pmatrix}$$

Beispiel 2.48

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aX_1 + bX_2 \\ cX_1 + dX_2 \end{pmatrix}$$

Achtung: Die Einträge in den Matrizen sind beliebige REs!
Wenn wir + und · auf Matrizen haben, was könnte * sein?

$$A^* := A^0 + A^1 + A^2 + \cdots$$

Existiert das? Was ist das?
Es gilt: $A(i,j)$ beschreibt alle Wege von i nach j der Länge 1.

Beispiel 2.48

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aX_1 + bX_2 \\ cX_1 + dX_2 \end{pmatrix}$$

Achtung: Die Einträge in den Matrizen sind beliebige REs!
Wenn wir $+$ und $\cdot$ auf Matrizen haben, was könnte * sein?

$$A^* := A^0 + A^1 + A^2 + \cdots$$

Existiert das? Was ist das?
Es gilt: $A(i,j)$ beschreibt alle Wege von i nach j der Länge 1.
$A^n(i,j)$ beschreibt alle Wege von i nach j der Länge n.

Beispiel 2.48

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aX_1 + bX_2 \\ cX_1 + dX_2 \end{pmatrix}$$

Achtung: Die Einträge in den Matrizen sind beliebige REs!
Wenn wir $+$ und $\cdot$ auf Matrizen haben, was könnte * sein?

$$A^* := A^0 + A^1 + A^2 + \cdots$$

Existiert das? Was ist das?
Es gilt: $A(i,j)$ beschreibt alle Wege von i nach j der Länge 1.
$A^n(i,j)$ beschreibt alle Wege von i nach j der Länge n.
Daher sollte gelten:
$A^*(i,j)$ beschreibt alle Wege von i nach j endlicher Länge.

Beispiel 2.48

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aX_1 + bX_2 \\ cX_1 + dX_2 \end{pmatrix}$$

Achtung: Die Einträge in den Matrizen sind beliebige REs!
Wenn wir $+$ und $\cdot$ auf Matrizen haben, was könnte * sein?

$$A^* := A^0 + A^1 + A^2 + \cdots$$

Existiert das? Was ist das?
Es gilt: $A(i,j)$ beschreibt alle Wege von i nach j der Länge 1.
$A^n(i,j)$ beschreibt alle Wege von i nach j der Länge n.
Daher sollte gelten:
$A^*(i,j)$ beschreibt alle Wege von i nach j endlicher Länge.

Aus dem Beweis des Satzes von Kleene wissen wir:

$A^*(i,j)$ existiert und ist der reguläre Ausdruck α_{ij}^n.

Satz 2.49

Sei A eine $n \times n$ Matrix regulärer Ausdrücke.
Seien x und b Vektoren der Größe n.
Falls $\epsilon \notin L(A(i,j))$ für alle i,j, dann gilt

$$x = Ax + b \implies x = A^* b$$

Satz 2.49

Sei A eine $n \times n$ Matrix regulärer Ausdrücke.
Seien x und b Vektoren der Größe n.
Falls $\epsilon \notin L(A(i,j))$ für alle i, j, dann gilt

$$x = Ax + b \implies x = A^*b$$

Beweis: zB Kozen.

Satz 2.49

Sei A eine $n \times n$ Matrix regulärer Ausdrücke.
Seien x und b Vektoren der Größe n.
Falls $\epsilon \notin L(A(i,j))$ für alle i, j, dann gilt

$$x = Ax + b \implies x = A^*b$$

Beweis: zB Kozen.

Berechnung von A^*: zB Kozen oder Satz von Kleene.

Bemerkung:
Die Nebenbedingung $\epsilon \notin L(A(i,j))$ ist automatisch gegeben, wenn A von einem Automaten ohne ϵ-Übergänge stammt,

Satz 2.49

Sei A eine $n \times n$ Matrix regulärer Ausdrücke.
Seien x und b Vektoren der Größe n.
Falls $\epsilon \notin L(A(i,j))$ für alle i, j, dann gilt

$$x = Ax + b \implies x = A^*b$$

Beweis: zB Kozen.
Berechnung von A^*: zB Kozen oder Satz von Kleene.

Bemerkung:
Die Nebenbedingung $\epsilon \notin L(A(i,j))$ ist automatisch gegeben, wenn A von einem Automaten ohne ϵ-Übergänge stammt,

denn $A(i,j) = a_{ij}$ ist die Summe der Buchstaben, die von i nach j führen.

Wann wendet man welches Verfahren zum Lösen von Gleichungssystemen an:

Wann wendet man welches Verfahren zum Lösen von Gleichungssystemen an:

- Schrittweises Lösen des Gleichungssystems mit Ardens Lemma: für Berechnungen per Hand.

Wann wendet man welches Verfahren zum Lösen von Gleichungssystemen an:

- Schrittweises Lösen des Gleichungssystems mit Ardens Lemma: für Berechnungen per Hand.
- Matrizen-Ansatz mit A^*: für Theorie und Programmierung.

Beweis

von Ardens Lemma:
Wir nehmen an $X = AX \cup B$.

Beweis

von Ardens Lemma:
Wir nehmen an $X = AX \cup B$.

$$X = A(AX \cup B) \cup B$$

Beweis

von Ardens Lemma:
Wir nehmen an $X = AX \cup B$.

$$X = A(AX \cup B) \cup B = A^2X \cup AB \cup B$$

Beweis

von Ardens Lemma:
Wir nehmen an $X = AX \cup B$.

$$\begin{aligned} X &= A(AX \cup B) \cup B = A^2X \cup AB \cup B \\ &= A^2(AX \cup B) \cup AB \cup B = A^3X \cup A^2B \cup AB \cup B = \ldots \end{aligned}$$

Mit Induktion zeigt man für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$X = A^{n+1}X \cup \bigcup_{i \leq n} A^iB$$

A^*B

Beweis

von Ardens Lemma:
Wir nehmen an $X = AX \cup B$.

$$\begin{aligned} X &= A(AX \cup B) \cup B = A^2X \cup AB \cup B \\ &= A^2(AX \cup B) \cup AB \cup B = A^3X \cup A^2B \cup AB \cup B = \ldots \end{aligned}$$

Mit Induktion zeigt man für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$X = A^{n+1}X \cup \bigcup_{i \leq n} A^iB$$

0: Behauptung wird zu $X = AX \cup B$, der Annahme.

$$X = A^{n+1}X \cup \bigcup_{i \leq n} A^iB$$

Wir zeigen nun $X = A^*B$.

$$X = A^{n+1}X \cup \bigcup_{i \leq n} A^i B$$

Wir zeigen nun $X = A^*B$.

$A^*B \subseteq X$: $\quad w \in A^*B = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A^i B$

$$X = A^{n+1}X \cup \bigcup_{i \leq n} A^i B$$

Wir zeigen nun $X = A^*B$.

$A^*B \subseteq X$: $\quad w \in A^*B = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A^i B$

$$\implies \exists n.\ w \in A^n B$$

$$\implies w \in X$$

$$X = A^{n+1}X \cup \bigcup_{i \leq n} A^i B$$

Wir zeigen nun $X = A^*B$.

$A^*B \subseteq X$: $\quad w \in A^*B = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A^i B$

$$\implies \exists n.\ w \in A^n B$$

$$\implies w \in X$$

$X \subseteq A^*B$:

$$X = A^{n+1}X \cup \bigcup_{i \leq n} A^i B$$

Wir zeigen nun $X = A^*B$.

$A^*B \subseteq X$: $\quad w \in A^*B = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A^i B$

$$\implies \exists n.\ w \in A^n B$$

$$\implies w \in X$$

$X \subseteq A^*B$:
 Sei $w \in X$ und $n := |w|$.

$$X = A^{n+1}X \cup \bigcup_{i \leq n} A^i B$$

Wir zeigen nun $X = A^*B$.

$A^*B \subseteq X$: $\quad w \in A^*B = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A^i B$

$\implies \exists n.\ w \in A^n B$

$\implies w \in X$

$X \subseteq A^*B$: $\quad$ Sei $w \in X$ und $n := |w|$.

$\epsilon \notin A$

$$X = A^{n+1}X \cup \bigcup_{i \leq n} A^i B$$

Wir zeigen nun $X = A^*B$.

$A^*B \subseteq X$: $\quad w \in A^*B = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A^i B$

$\implies \exists n.\ w \in A^n B$

$\implies w \in X$

$X \subseteq A^*B$: $\quad$ Sei $w \in X$ und $n := |w|$.

$\epsilon \notin A$

$\implies \forall u \in A^{n+1}.\ |u| \geq n+1$

$$X = A^{n+1}X \cup \bigcup_{i \leq n} A^i B$$

Wir zeigen nun $X = A^*B$.

$A^*B \subseteq X$: $\quad w \in A^*B = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A^i B$

$\implies \exists n.\ w \in A^n B$

$\implies w \in X$

$X \subseteq A^*B$: $\quad$ Sei $w \in X$ und $n := |w|$.

$\epsilon \notin A$

$\implies \forall u \in A^{n+1}.\ |u| \geq n+1$

$\implies w \notin A^{n+1}X$

$\implies w \in \bigcup_{i \leq n} A^i B$

$$X = A^{n+1}X \cup \bigcup_{i \leq n} A^i B$$

Wir zeigen nun $X = A^*B$.

$A^*B \subseteq X$: $\quad w \in A^*B = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A^i B$

$\implies \exists n.\ w \in A^n B$

$\implies w \in X$

$X \subseteq A^*B$: $\quad$ Sei $w \in X$ und $n := |w|$.

$\epsilon \notin A$

$\implies \forall u \in A^{n+1}.\ |u| \geq n+1$

$\implies w \notin A^{n+1}X$

$\implies w \in \bigcup_{i \leq n} A^i B \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A^i B$

$$X = A^{n+1}X \cup \bigcup_{i \leq n} A^i B$$

Wir zeigen nun $X = A^*B$.

$A^*B \subseteq X$: $\quad w \in A^*B = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A^i B$

$$\implies \exists n.\ w \in A^n B$$

$$\implies w \in X$$

$X \subseteq A^*B$: $\quad$ Sei $w \in X$ und $n := |w|$.

$$\epsilon \notin A$$

$$\implies \forall u \in A^{n+1}.\ |u| \geq n+1$$

$$\implies w \notin A^{n+1}X$$

$$\implies w \in \bigcup_{i \leq n} A^i B \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A^i B = A^*B$$

$\square$

$$X = A^{n+1}X \cup \bigcup_{i \leq n} A^i B$$

Wir zeigen nun $X = A^*B$.

$A^*B \subseteq X$: $\quad w \in A^*B = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A^i B$

$$\implies \exists n.\ w \in A^n B$$

$$\implies w \in X$$

$X \subseteq A^*B$: $\quad$ Sei $w \in X$ und $n := |w|$.

$$\epsilon \notin A$$

$$\implies \forall u \in A^{n+1}.\ |u| \geq n+1$$

$$\implies w \notin A^{n+1}X$$

$$\implies w \in \bigcup_{i \leq n} A^i B \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A^i B = A^*B$$

$\square$

2.11 Minimierung endlicher Automaten

1. Beispiele
2. Algorithmen
3. Minimalitätsbeweis