Script generated by TTT

Title: Nipkow: Theo (27.05.2019)

Date: Mon May 27 14:14:20 CEST 2019

Duration: 90:35 min

Pages: 53

Definition 4.48

Ein (nichtdeterministischer) Kellerautomat (PDA = Pushdown Automaton) $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta, F)$ besteht aus

Q endliche Menge von Zuständen

Σ endliches Eingabealphabet

Γ endliches Kelleralphabet

$q_0 \in Q$ Anfangszustand

$Z_0 \in \Gamma$ initialer Kellerinhalt

δ Übergangsfunktion $\delta\colon Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \times \Gamma \to \mathcal{P}_e(Q \times \Gamma^*)$
($\mathcal{P}_e$ = Menge aller endlichen Teilmengen)

$F \subseteq Q$ Endzustände

Intuitive Bedeutung von $(q', \alpha) \in \delta(q, a, Z)$:

Wenn sich M im Zustand q befindet, das Eingabezeichen a liest, und Z das oberste Kellerzeichen ist, so kann M im nächsten Schritt in q' übergehen und Z durch α ersetzen.

Achtung: $\delta(q, a, Z) \ni (q', \alpha)$

- α kann die Länge, 0, 1, und mehr haben

Definition 4.49

Eine Konfiguration eines Kellerautomaten M ist ein Tripel (q, w, α) mit $q \in Q$, $w \in \Sigma^*$ und $\alpha \in \Gamma^*$.

Definition 4.49

Eine Konfiguration eines Kellerautomaten M ist ein Tripel (q, w, α) mit $q \in Q$, $w \in \Sigma^*$ und $\alpha \in \Gamma^*$.
Die Anfangskonfiguration von M für die Eingabe $w \in \Sigma^*$ ist (q_0, w, Z_0).

Definition 4.49

Eine Konfiguration eines Kellerautomaten M ist ein Tripel (q, w, α) mit $q \in Q$, $w \in \Sigma^*$ und $\alpha \in \Gamma^*$.
Die Anfangskonfiguration von M für die Eingabe $w \in \Sigma^*$ ist (q_0, w, Z_0).

Intuitiv stellt eine Konfiguration (q, w, α) eine "Momentaufnahme" des Kellerautomaten dar:

- Der momentane Zustand ist q.
- Der noch zu lesende Teil der Eingabe ist w.
- Der aktuelle Kellerinhalt ist α
  (das oberste Kellerzeichen ganz links stehend).

Definition 4.50

Die Transitionsrelation $\rightarrow_M$ zwischen Konfigurationen:

$$(q, aw, Z\alpha) \rightarrow_M (q', w, \beta\alpha) \quad \text{falls } (q', \beta) \in \delta(q, a, Z)$$

$$(q, w, Z\alpha) \rightarrow_M (q', w, \beta\alpha) \quad \text{falls } (q', \beta) \in \delta(q, \epsilon, Z)$$

Definition 4.50

Die Transitionsrelation $\rightarrow_M$ zwischen Konfigurationen:

$$(q, aw, Z\alpha) \rightarrow_M (q', w, \beta\alpha) \quad \text{falls } (q', \beta) \in \delta(q, a, Z)$$

$$(q, w, Z\alpha) \rightarrow_M (q', w, \beta\alpha) \quad \text{falls } (q', \beta) \in \delta(q, \epsilon, Z)$$

Intuitive Bedeutung von $(q, w, \alpha) \rightarrow_M (q', w', \alpha')$:

Wenn M sich in der Konfiguration (q, w, α) befindet, dann kann er in einen Schritt in die Nachfolgerkonfiguration (q', w', α') übergehen.

Definition 4.51

- Ein PDA M akzeptiert $w \in \Sigma^*$ mit Endzustand gdw

$$(q_0, w, Z_0) \rightarrow_M^* (f, \epsilon, \gamma) \text{ für ein } f \in F,\ \gamma \in \Gamma^*.$$

$$L_F(M) := \{w \mid \exists f \in F, \gamma \in \Gamma^*.\ (q_0, w, Z_0) \rightarrow_M^* (f, \epsilon, \gamma)\}$$

Definition 4.51

- Ein PDA M akzeptiert $w \in \Sigma^*$ mit Endzustand gdw

$$(q_0, w, Z_0) \rightarrow_M^* (f, \epsilon, \gamma) \text{ für ein } f \in F,\ \gamma \in \Gamma^*.$$

$$L_F(M) := \{w \mid \exists f \in F, \gamma \in \Gamma^*.\ (q_0, w, Z_0) \rightarrow_M^* (f, \epsilon, \gamma)\}$$

- Ein PDA M akzeptiert $w \in \Sigma^*$ mit leeren Keller gdw

$$(q_0, w, Z_0) \rightarrow_M^* (q, \epsilon, \epsilon) \text{ für ein } q \in Q.$$

Definition 4.51

- Ein PDA M akzeptiert $w \in \Sigma^*$ mit Endzustand gdw

$$(q_0, w, Z_0) \rightarrow_M^* (f, \epsilon, \gamma) \text{ für ein } f \in F,\ \gamma \in \Gamma^*.$$

$$L_F(M) := \{w \mid \exists f \in F, \gamma \in \Gamma^*.\ (q_0, w, Z_0) \rightarrow_M^* (f, \epsilon, \gamma)\}$$

- Ein PDA M akzeptiert $w \in \Sigma^*$ mit leeren Keller gdw

$$(q_0, w, Z_0) \rightarrow_M^* (q, \epsilon, \epsilon) \text{ für ein } q \in Q.$$

$$L_\epsilon(M) := \{w \mid \exists q \in Q.\ (q_0, w, Z_0) \rightarrow_M^* (q, \epsilon, \epsilon)\}$$

Definition 4.51

- Ein PDA M akzeptiert $w \in \Sigma^*$ mit Endzustand gdw

$$(q_0, w, Z_0) \rightarrow_M^* (f, \epsilon, \gamma) \text{ für ein } f \in F,\ \gamma \in \Gamma^*.$$

$$L_F(M) := \{w \mid \exists f \in F, \gamma \in \Gamma^*.\ (q_0, w, Z_0) \rightarrow_M^* (f, \epsilon, \gamma)\}$$

- Ein PDA M akzeptiert $w \in \Sigma^*$ mit leeren Keller gdw

$$(q_0, w, Z_0) \rightarrow_M^* (q, \epsilon, \epsilon) \text{ für ein } q \in Q.$$

$$L_\epsilon(M) := \{w \mid \exists q \in Q.\ (q_0, w, Z_0) \rightarrow_M^* (q, \epsilon, \epsilon)\}$$

Konvention: Wir blenden die F-Komponente von M aus, wenn wir nur an $L_\epsilon(M)$ interessiert sind.

Beispiel 4.52

Die Sprache $L = \{ww^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$ wird vom PDA

$$M = (\{p,q,r\},\ \{0,1\},\ \{0,1,Z_0\}, p,\ Z_0,\ \delta,\ \{r\})$$

Beispiel 4.52

Die Sprache $L = \{ww^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$ wird vom PDA

$$M = (\{p,q,r\},\ \{0,1\},\ \{0,1,Z_0\}, p,\ Z_0,\ \delta,\ \{r\})$$

$$\delta(p,a,Z) \quad = \quad \{(p,\ aZ)\} \quad \text{für } a \in \{0,1\},\ Z \in \{0,1,Z_0\}$$

$1, 0/10$ $\quad a \in \{0,1\}$

$a, Z/aZ$ $\quad Z \in \{0,1,Z_0\}$

Beispiel 4.52

Die Sprache $L = \{ww^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$ wird vom PDA

$$M = (\{p,q,r\},\ \{0,1\},\ \{0,1,Z_0\}, p,\ Z_0,\ \delta,\ \{r\})$$

$p \xrightarrow{\varepsilon,\, Z/Z} q \xrightarrow{\varepsilon,\, Z_0/\varepsilon} r$ $\quad a, a/\varepsilon$ $\quad \varepsilon, Z_0/\varepsilon$

$$
\begin{aligned}
\delta(p,a,Z) &= \{(p,\ aZ)\} && \text{für } a \in \{0,1\},\ Z \in \{0,1,Z_0\}\\
\delta(p,\epsilon,Z) &= \{(q,\ Z)\} && \text{für } Z \in \{0,1,Z_0\}\\
\delta(q,a,a) &= \{(q,\ \epsilon)\} && \text{für } a \in \{0,1\}\\
\delta(q,\epsilon,Z_0) &= \{(r,\ \epsilon)\}
\end{aligned}
$$

$(p, 1111, Z_0) \to (p, 111, 1Z_0) \to (p, 11, 11Z_0) \to$

$(q, 11, 11Z_0) \to (q, 1, 1Z_0) \to (q, \varepsilon, Z_0) \to (r, \varepsilon, \varepsilon)$

sowohl mit Endzustand als auch mit leerem Keller akzeptiert.

$\to (p, 1, 111Z_0) \to (p, \varepsilon, 1111Z_0) \to$

$(q, \varepsilon, 1111Z_0)$

Bemerkungen: PDAs und das Wortproblem

- Mit einem NFA A kann man $w \in L(A)$ durch parallele Verfolgung aller Berechnungspfade entscheiden, da sie alle endlich sind.
- Bei einem PDA kann es wegen ϵ-Übergängen auch unendliche Berechnungen $\to_M$ geben, zB $\delta(q,\epsilon,Z) = (q, ZZ)$:

$$(q,w,Z) \to_M (q,w,ZZ) \to_M (q,w,ZZZ) \to_M \ldots$$

Diese sind wegen des möglicherweise wachsenden oder pulsierenden Kellers nicht einfach zu eliminieren.

$1, 0/10$ $\quad a \in \{0,1\}$

$a, Z/aZ$ $\quad Z \in \{0,1,Z_0\}$

$p \xrightarrow{\varepsilon,\, Z/Z} q \xrightarrow{\varepsilon,\, Z_0/\varepsilon} r$ $\quad a, a/\varepsilon$ $\quad \varepsilon, Z_0/\varepsilon$

$(p, 1111, Z_0) \to (p, 111, 1Z_0) \to (p, 11, 11Z_0) \to$

$(q, 11, 11Z_0) \to (q, 1, 1Z_0) \to (q, \varepsilon, Z_0) \to (r, \varepsilon, \varepsilon)$

$\to (p, 1, 111Z_0) \to (p, \varepsilon, 1111Z_0) \to$

$(q, \varepsilon, 1111Z_0)$

Bemerkungen: PDAs und das Wortproblem

- Mit einem NFA A kann man $w \in L(A)$ durch parallele Verfolgung aller Berechnungspfade entscheiden, da sie alle endlich sind.
- Bei einem PDA kann es wegen ϵ-Übergängen auch unendliche Berechnungen $\to_M$ geben, zB $\delta(q, \epsilon, Z) = (q, ZZ)$:

  $$(q, w, Z) \to_M (q, w, ZZ) \to_M (q, w, ZZZ) \to_M \ldots$$

  Diese sind wegen des möglicherweise wachsenden oder pulsierenden Kellers nicht einfach zu eliminieren.
- Daher ist es a priori unklar, wie man mit einem PDA das Wortproblem entscheidet.

Ziel:

Akzeptanz durch Endzustände und leeren Keller gleich mächtig.

Satz 4.53 (Endzustand $\to$ leerer Keller)

Zu jedem PDA $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta, F)$ kann man in linearer Zeit einen PDA $M' = (Q', \Sigma, \Gamma', q_0', Z_0', \delta')$ konstruieren mit $L_F(M) = L_\epsilon(M')$.

Ziel:

Akzeptanz durch Endzustände und leeren Keller gleich mächtig.

Satz 4.53 (Endzustand $\to$ leerer Keller)

Zu jedem PDA $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta, F)$ kann man in linearer Zeit einen PDA $M' = (Q', \Sigma, \Gamma', q_0', Z_0', \delta')$ konstruieren mit $L_F(M) = L_\epsilon(M')$.

Ziel:

$$(q_0, w, Z_0) \to_M^* (f, \epsilon, \gamma) \quad \Leftrightarrow \quad (q_0', w, Z_0') \to_{M'}^* (q, \epsilon, \epsilon)$$

Beweisskizze:

M' (mit leerem Keller) simuliert M (mit Endzustand). Zusätzlich:

1, 0/10 $a \in \{0,1\}$

a, Z/aZ $Z \in \{0,1,Z_0\}$

Ziel: p $\xrightarrow{\varepsilon, Z/Z}$ q (a, a/ε) $\xrightarrow{\varepsilon, Z_0/\varepsilon}$ r

Akzeptanz durch Endzustände und leeren Keller gleich mächtig.

Satz 4.53 (Endzustand → leerer Keller)

Zu jedem PDA $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta, F)$ *kann man in linearer Zeit einen PDA* $M' = (Q', \Sigma, \Gamma', q_0, Z_0', \delta')$ *konstruieren mit* $L_F(M) = L_\epsilon(M')$.

(p, 1111, Z_0) → (p, 111, 1Z_0) → (p, 11, 11Z_0) →

(q, 11, 11Z_0) → (q, 1, 1Z_0) → (q, ε, Z_0) → (r, ε, ε)

Ziel:

(p, 1, 111Z_0) → (p, ε, 1111Z_0) →

$$(q_0, w, Z_0) \to_M^* (f, \epsilon, \gamma) \quad \Leftrightarrow \quad (q_0', w, Z_0') \to_{M'}^* (q, \epsilon, \epsilon)$$

(q, ε, 1111 Z_0)

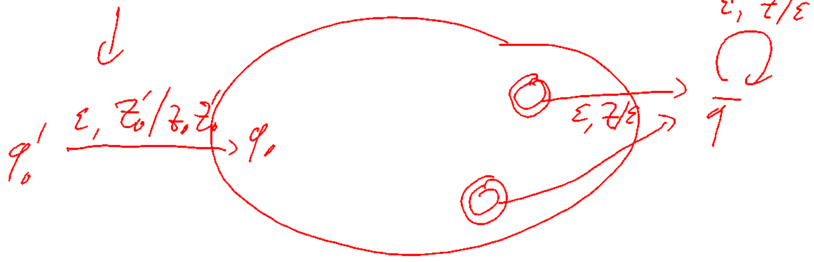
Beweisskizze:

M' (mit leerem Keller) simuliert M (mit Endzustand). Zusätzlich:

- Sobald M einen Endzustand erreicht, darf M' den Keller leeren (im neuen Zustand $\bar{q}$).

Endzust. → leerer Keller

verhindere frühzeitige Leerung stack

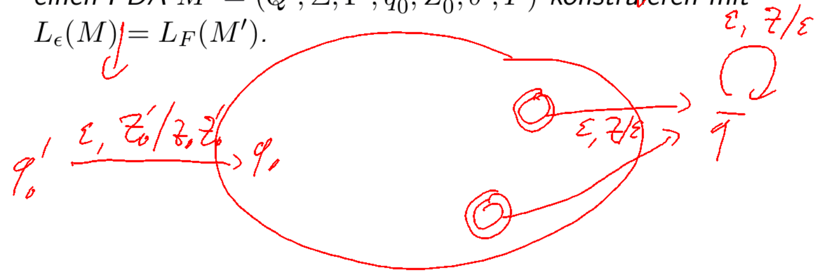


Satz 4.54 (Leerer Keller → Endzustand)

Zu jedem PDA $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta)$ *kann man in linearer Zeit einen PDA* $M' = (Q', \Sigma, \Gamma', q_0', Z_0', \delta', F)$ *konstruieren mit* $L_\epsilon(M) = L_F(M')$.

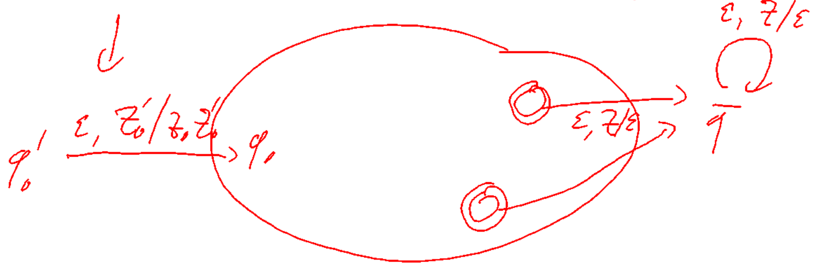
Endzust. → leerer Keller

verhindere frühzeitige Leerung stack



Endzust. → leerer Keller

verhindere frühzeitige Leerung stack



Leerer Keller → Endzust.

Satz 4.54 (Leerer Keller → Endzustand)

Zu jedem PDA $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta)$ *kann man in linearer Zeit einen PDA* $M' = (Q', \Sigma, \Gamma', q_0', Z_0', \delta', F)$ *konstruieren mit* $L_\epsilon(M) = L_F(M')$.

Beweisskizze:

M' (mit Endzustand) simuliert M (mit leerem Keller). Zusätzlich:

- M' schreibt am Anfang ein neues Zeichen Z_0' auf den Keller.
- Sobald M auf dem Keller Z_0' findet, ist der Keller eigentlich leer, und M' geht in den (neuen) Endzustand f.

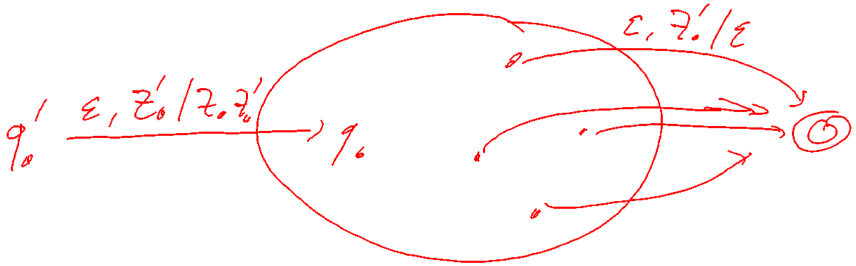
$$\begin{array}{lcl} Q' & := & Q \uplus \{q_0', f\} \\ \Gamma' & := & \Gamma \uplus \{Z_0'\} \\ F & := & \{f\} \end{array}$$

$$\begin{array}{lcll} \delta'(q_0', \epsilon, Z_0') & = & \{(q_0, Z_0 Z_0')\} & \\ \delta'(q, b, Z) & = & \delta(q, b, Z) & \text{für } q \in Q,\ b \in \Sigma \cup \{\epsilon\},\ Z \in \Gamma \\ \delta'(q, \epsilon, Z_0') & = & \{(f, Z_0')\} & \text{für } q \in Q \end{array}$$ □

ε, Z0'/ε

q0' ε, Z0'/Z0Z0'

Leerer Keller → Endzust.

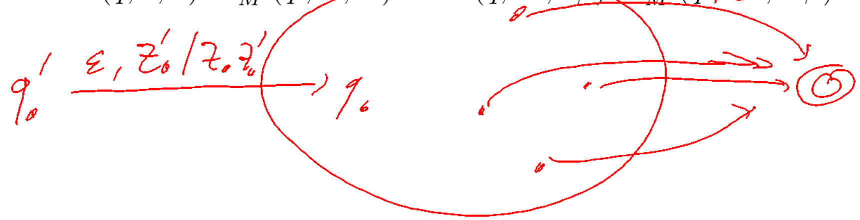


Leerer Keller → Endzust.

Die folgenden Sätze erleichtern Beweise über Berechnungen von PDAs.

Lemma 4.55 (Erweiterungslemma)

$$(q, u, \alpha) \to_M^n (q', u', \alpha') \implies (q, uv, \alpha\beta) \to_M^n (q', u'v, \alpha'\beta)$$



$\Gamma = \{Z\}, \Sigma = \{a, b\}$

(q, bba, Z)

(q, ba, ε)

Die folgenden Sätze erleichtern Beweise über Berechnungen von PDAs.

Lemma 4.55 (Erweiterungslemma)

$$(q, u, \alpha) \to_M^n (q', u', \alpha') \implies (q, uv, \alpha\beta) \to_M^n (q', u'v, \alpha'\beta)$$

$L = \{w \mid \#_b(w) = \#_a(w) + 1 \wedge \forall p < w.\ \#_a(p) \geq \#_b(p)\}$

Beweis:
Nach Definition von $\to_M$ gilt

$$(q_i, u_i, \alpha_i) \to_M (q_{i+1}, u_{i+1}, \alpha_{i+1}) \implies$$
$$(q_i, u_i v, \alpha_i \beta) \to_M (q_{i+1}, u_{i+1} v, \alpha_{i+1} \beta)$$

Mit Induktion über n folgt die Behauptung. □

$\Gamma = \{Z\}, \Sigma = \{a, b\}$

(q, bba, Z)

(q, ba, ε)

Die folgenden Sätze erleichtern Beweise über Berechnungen von PDAs.

Lemma 4.55 (Erweiterungslemma)

$$(q, u, \alpha) \to_M^n (q', u', \alpha') \implies (q, uv, \alpha\beta) \to_M^n (q', u'v, \alpha'\beta)$$

$L = \{w \mid \#_b(w) = \#_a(w) + 1 \wedge \forall p < w.\ \#_a(p) \geq \#_b(p)\}$

Beweis:
Nach Definition von $\to_M$ gilt

$$(q_i, u_i, \alpha_i) \to_M (q_{i+1}, u_{i+1}, \alpha_{i+1}) \implies$$
$$(q_i, u_i v, \alpha_i \beta) \to_M (q_{i+1}, u_{i+1} v, \alpha_{i+1} \beta)$$

Mit Induktion über n folgt die Behauptung. □

Gilt die Umkehrung, zB

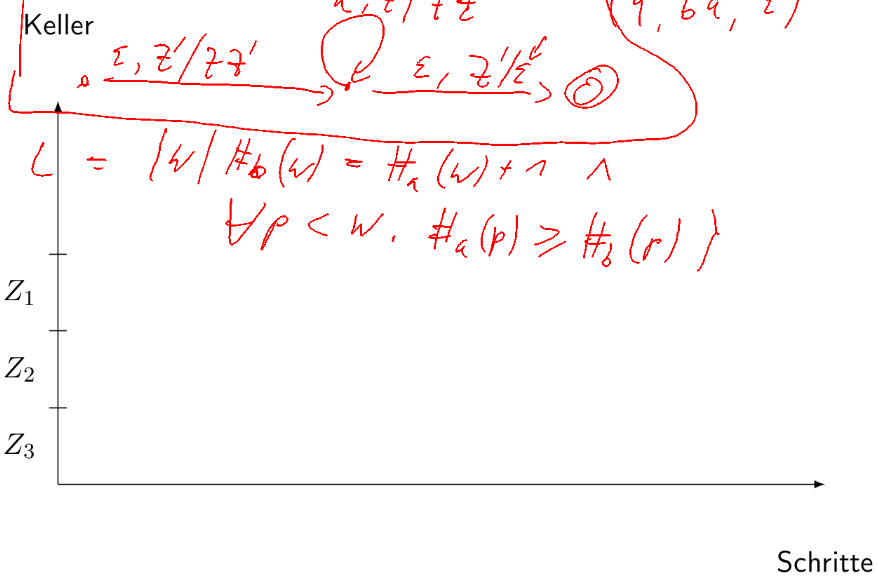
$$(q_1, aa, XZ) \to_M^* (q_3, \epsilon, YZ) \implies (q_1, aa, X) \to_M^* (q_3, \epsilon, Y)\ ?$$

$\Gamma = \{Z\}, \Sigma = \{a, b\}$

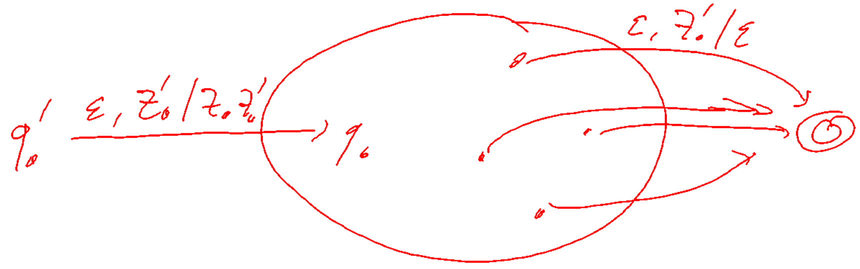
(q, bba, Z)

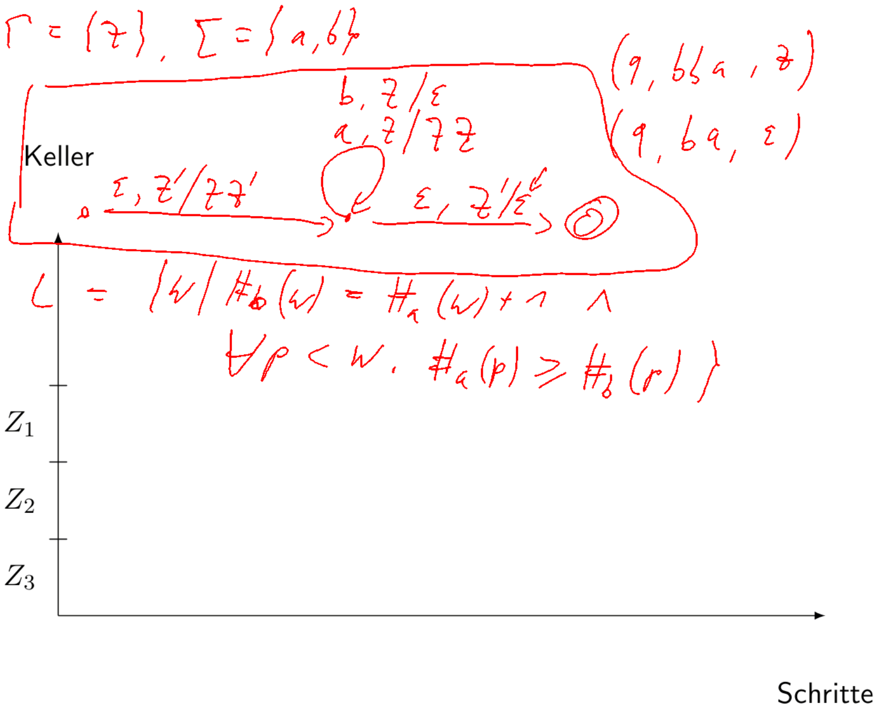
(q, ba, ε)

$L = \{w \mid \#_b(w) = \#_a(w) + 1 \wedge \forall p < w.\ \#_a(p) \geq \#_b(p)\}$



Leerer Keller → Endzust.





$L = \{w \mid \#_b(w) = \#_a(w) + 1 \wedge \forall p < w.\ \#_a(p) \geq \#_b(p)\}$

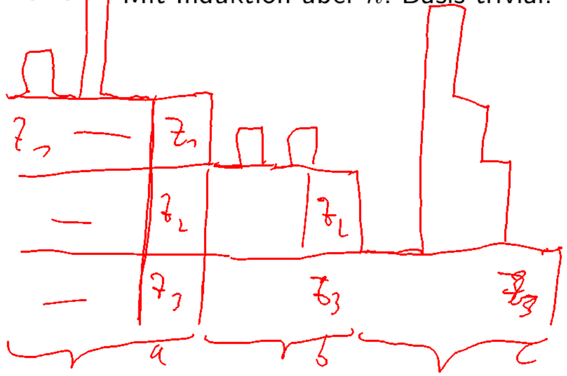
Satz 4.56 (Zerlegungssatz)

Wenn $(q, w, Z_{1\ldots k}) \to_M^n (q', \epsilon, \epsilon)$
dann gibt es u_i, p_i, n_i, *so dass*

$$(p_{i-1}, u_i, Z_i) \to_M^{n_i} (p_i, \epsilon, \epsilon) \qquad (i = 1, \ldots, k)$$

und $w = u_1 \ldots u_k$, $p_0 = q$, $p_k = q'$, $\sum n_i = n$.

Beweis: Mit Induktion über n. Basis trivial.



Satz 4.56 (Zerlegungssatz)

Wenn $(q, w, Z_{1\ldots k}) \to_M^n (q', \epsilon, \epsilon)$
dann gibt es u_i, p_i, n_i, *so dass*

$$(p_{i-1}, u_i, Z_i) \to_M^{n_i} (p_i, \epsilon, \epsilon) \qquad (i = 1, \ldots, k)$$

und $w = u_1 \ldots u_k$, $p_0 = q$, $p_k = q'$, $\sum n_i = n$.

Beweis: Mit Induktion über n. Basis trivial.
Schritt: Eine Berechnung der Länge $n+1$ hat die Form
$(q, bw', Z_{1\ldots k}) \to_M (p, w', Y_{1\ldots l} Z_{2\ldots k}) \to_M^n (q', \epsilon, \epsilon)$
IA $\Rightarrow \exists v_j, r_j, m_j\ (j = 1, \ldots, l)$, $\exists u_i, p_i, n_i\ (i = 2, \ldots, k)$ mit
$(r_{j-1}, v_j, Y_j) \to_M^{m_j} (r_j, \epsilon, \epsilon) \qquad (p_{i-1}, u_i, Z_i) \to_M^{n_i} (p_i, \epsilon, \epsilon)$
und $w' = v_{1\ldots l} u_{2\ldots k}$, $r_0 = p$, $r_l = p_1$, $p_k = q'$, $\sum m_j + \sum n_i = n$.
Mit Erweiterungslemma: $(r_{j-1}, v_{j\ldots l}, Y_{j\ldots l}) \to_M^{m_j} (r_j, v_{j+1\ldots l}, Y_{j+1\ldots l})$
$\Rightarrow (r_0, v_{1\ldots l}, Y_{1\ldots l}) \to_M^{n_1 - 1} (r_l, \epsilon, \epsilon)$ wobei $n_1 := 1 + \sum m_j$.
Aus $(q, bv_{1\ldots l}, Z_1) \to_M (p, v_{1\ldots l}, Y_{1\ldots l})$ folgt $(p_0, u_1, Z_1) \to_M^{n_1} (p_1, \epsilon, \epsilon)$
wobei $p_0 := q$, $u_1 := bv_{1\ldots l}$, $p_1 := r_l$.

4.9 Äquivalenz von PDAs und CFGs

Satz 4.57 (CFG → PDA)

Zu jeder CFG G kann man einen PDA M konstruieren, der mit leerem Keller akzeptiert, so dass $L_\epsilon(M) = L(G)$.

Konstruktion:
Zuerst bringen wir alle Produktionen von G in die Form

$$A \to bB_1 \ldots B_k$$

wobei $b \in \Sigma \cup \{\epsilon\}$.

4.9 Äquivalenz von PDAs und CFGs

Satz 4.57 (CFG → PDA)

Zu jeder CFG G kann man einen PDA M konstruieren, der mit leerem Keller akzeptiert, so dass $L_\epsilon(M) = L(G)$.

Konstruktion:
Zuerst bringen wir alle Produktionen von G in die Form

$$A \to bB_1 \dots B_k$$

wobei $b \in \Sigma \cup \{\epsilon\}$.

Methode: Für jedes $a \in \Sigma$

1. füge ein neues A_a zu V hinzu,

4.9 Äquivalenz von PDAs und CFGs

Satz 4.57 (CFG → PDA)

Zu jeder CFG G kann man einen PDA M konstruieren, der mit leerem Keller akzeptiert, so dass $L_\epsilon(M) = L(G)$.

Konstruktion:
Zuerst bringen wir alle Produktionen von G in die Form

$$A \to b\underline{B_1 \dots B_k}$$

wobei $b \in \Sigma \cup \{\epsilon\}$.

Methode: Für jedes $a \in \Sigma$

1. füge ein neues A_a zu V hinzu,
2. ersetze a rechts in P durch A_a (außer am Kopfende),

4.9 Äquivalenz von PDAs und CFGs

Satz 4.57 (CFG → PDA)

Zu jeder CFG G kann man einen PDA M konstruieren, der mit leerem Keller akzeptiert, so dass $L_\epsilon(M) = L(G)$.

Konstruktion:
Zuerst bringen wir alle Produktionen von G in die Form

$$A \to bB_1 \dots B_k$$

wobei $b \in \Sigma \cup \{\epsilon\}$.

Methode: Für jedes $a \in \Sigma$

1. füge ein neues A_a zu V hinzu,
2. ersetze a rechts in P durch A_a (außer am Kopfende),
3. füge eine neue Produkion $A_a \to a$ hinzu.

Alle Produktionen in $G = (V, \Sigma, P, S)$ haben jetzt die Form

$$A \to b\underline{B_1 \dots B_k}$$

Alle Produktionen in $G = (V, \Sigma, P, S)$ haben jetzt die Form

$$A \to b\underbrace{B_1 \dots B_k}_{\beta}$$

Der PDA wird wie folgt definiert:

$$M \quad := \quad (\{q\}, \Sigma, V, q, S, \delta)$$

wobei

$$(A \to b\beta) \in P \implies \delta(q, b, A) \ni (q, \beta)$$

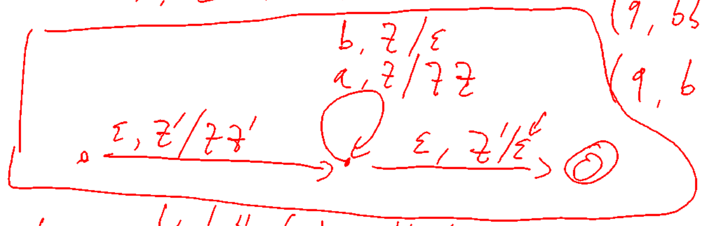
also für alle $b \in \Sigma \cup \{\epsilon\}$ und $A \in V$:

$$\delta(q, b, A) := \{(q, \beta) \mid (A \to b\beta) \in P\}$$

$\Gamma = \{Z\}, \Sigma = \{a, b\}$

(q, bba, Z)

(q, ba, ε)



$L = \{w \mid \#_b(w) = \#_a(w) + 1 \wedge \forall p < w.\ \#_a(p) \geq \#_b(p)\}$

$E \to a \mid E + E \mid E * E \mid [\ E\ ]$

Alle Produktionen in $G = (V, \Sigma, P, S)$ haben jetzt die Form

$P \to +, \quad M \to *, \quad B \to]$

$$A \to bB_1 \dots B_k$$

Der PDA wird wie folgt definiert:

$E \to a \mid E P E \mid E M E \mid [\ E B$

$$M \quad := \quad (\{q\}, \Sigma, V, q, S, \delta)$$

$\delta(q, a, E) = \{(q, \varepsilon)\}$

wobei

$$(A \to b\beta) \in P \implies \delta(q, b, A) \ni (q, \beta)$$

$\delta(q, [, E) = \{(q, EB)\}$

$\delta(q, \varepsilon, E) =$

also für alle $b \in \Sigma \cup \{\epsilon\}$ und $A \in V$:

$$\delta(q, b, A) := \{(q, \beta) \mid (A \to b\beta) \in P\}$$

$E \to a \mid E+E \mid E*E \mid [E]$

Alle Produktionen in $G = (V, \Sigma, P, S)$ haben jetzt die Form

$$A \to bB_1 \dots B_k$$

Der PDA wird wie folgt definiert:

$$M := (\{q\}, \Sigma, V, q, S, \delta)$$

wobei

$$(A \to b\beta) \in P \implies \delta(q, b, A) \ni (q, \beta)$$

$\delta(q, a, E) = \{(q, \varepsilon)\}$ $\delta(q, +, P) = \{(q, \varepsilon)\}$

$\delta(q, \varepsilon, E) = \{(q, EPE), (q, EME)\}$

also für alle $b \in \Sigma \cup \{\epsilon\}$ und $A \in V$:

$$\delta(q, b, A) := \{(q, \beta) \mid (A \to b\beta) \in P\}$$

Lemma 4.58

Für alle $u, v \in \Sigma^*$ *und* $\gamma \in V^*$ *und* $A \in V$ *gilt:*

$$A \to_G^n u\gamma \text{ mit Linksableitung gdw } (q, uv, A) \to_M^n (q, v, \gamma)$$

Lemma 4.58

Für alle $u, v \in \Sigma^*$ *und* $\gamma \in V^*$ *und* $A \in V$ *gilt:*

$$A \to_G^n u\gamma \text{ mit Linksableitung gdw } (q, uv, A) \to_M^n (q, v, \gamma)$$

Beweis:

Mit Induktion über n. Basis $n = 0$ trivial.

Lemma 4.58

Für alle $u, v \in \Sigma^*$ *und* $\gamma \in V^*$ *und* $A \in V$ *gilt:*

$$A \to_G^n u\gamma \text{ mit Linksableitung gdw } (q, uv, A) \to_M^n (q, v, \gamma)$$

Beweis:

Mit Induktion über n. Basis $n = 0$ trivial. Schritt:

$$A \to_G^{n+1} u\gamma$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\exists (B \to b\beta) \in P, w, \alpha.\ A \to_G^n wB\alpha \to_G wb\beta\alpha = u\gamma$$
(dh $wb = u, \beta\alpha = \gamma$)

Lemma 4.58

Für alle $u, v \in \Sigma^*$ *und* $\gamma \in V^*$ *und* $A \in V$ *gilt:*

$$A \to_G^n u\gamma \text{ mit Linksableitung gdw } (q, uv, A) \to_M^n (q, v, \gamma)$$

Beweis:
Mit Induktion über n. Basis $n = 0$ trivial. Schritt:

$$A \to_G^{n+1} u\gamma$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\exists (B \to b\beta) \in P, w, \alpha.\ A \to_G^n wB\alpha \to_G wb\beta\alpha = u\gamma$$
$$(\text{dh } wb = u, \beta\alpha = \gamma)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(q, wbv, A) \to_M^n (q, bv, B\alpha) \wedge (q, bv, B\alpha) \to_M (q, v, \beta\alpha)$$

Lemma 4.58

Für alle $u, v \in \Sigma^*$ *und* $\gamma \in V^*$ *und* $A \in V$ *gilt:*

$$A \to_G^n u\gamma \text{ mit Linksableitung gdw } (q, uv, A) \to_M^n (q, v, \gamma)$$

Beweis:
Mit Induktion über n. Basis $n = 0$ trivial. Schritt:

$$A \to_G^{n+1} u\gamma$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\exists (B \to b\beta) \in P, w, \alpha.\ A \to_G^n wB\alpha \to_G wb\beta\alpha = u\gamma$$
$$(\text{dh } wb = u, \beta\alpha = \gamma)$$

Lemma 4.58

Für alle $u, v \in \Sigma^*$ *und* $\gamma \in V^*$ *und* $A \in V$ *gilt:*

$$A \to_G^n u\gamma \text{ mit Linksableitung gdw } (q, uv, A) \to_M^n (q, v, \gamma)$$

Beweis:
Mit Induktion über n. Basis $n = 0$ trivial. Schritt:

$$A \to_G^{n+1} u\gamma$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\exists (B \to b\beta) \in P, w, \alpha.\ A \to_G^n wB\alpha \to_G wb\beta\alpha = u\gamma$$
$$(\text{dh } wb = u, \beta\alpha = \gamma)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(q, wbv, A) \to_M^n (q, bv, B\alpha) \wedge (q, bv, B\alpha) \to_M (q, v, \beta\alpha)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(q, uv, A) \to_M^{n+1} (q, v, \gamma)$$

□

$$A \to_G^n u\gamma \text{ mit Linksableitung gdw } (q, uv, A) \to_M^n (q, v, \gamma)$$

Satz 4.59

$L(G) = L_\epsilon(M)$

Beweis:
$u \in L(G)$

$A \to_G^n u\gamma$ mit Linksableitung gdw $(q, uv, A) \to_M^n (q, v, \gamma)$

$(q, u, S) \to^* (q, \varepsilon, \varepsilon)$

Satz 4.59
$L(G) = L_\epsilon(M)$

Beweis:
$u \in L(G)$

$\Leftrightarrow S \to_G^* u$ mit Linksableitung

$\Leftrightarrow (q, u, S) \to_M^* (q, \epsilon, \epsilon)$

$A \to_G^n u\gamma$ mit Linksableitung gdw $(q, uv, A) \to_M^n (q, v, \gamma)$

Satz 4.59
$L(G) = L_\epsilon(M)$

Beweis:
$u \in L(G)$

$\Leftrightarrow S \to_G^* u$ mit Linksableitung

$\Leftrightarrow (q, u, S) \to_M^* (q, \epsilon, \epsilon)$

$\Leftrightarrow u \in L_\epsilon(M)$ $\square$