Script generated by TTT

Title: Seidl: Info2 (28.10.2016)

Date: Fri Oct 28 08:28:26 CEST 2016

Duration: 86:35 min

Pages: 38

Frage

ID 89 LAC

Wie beweisen wir, dass Zusicherungen lokal zusammen passen?

Teilproblem 1: Zuweisungen

Betrachte z.B. die Zuweisung: `x = y+z;`

Damit nach der Zuweisung gilt: $x > 0$, // Nachbedingung

muss vor der Zuweisung gelten: $y + z > 0$. // Vorbedingung

Allgemeines Prinzip

- Jede Anweisung transformiert eine Nachbedingung B in eine minimale Anforderung, die vor Ausführung erfüllt sein muss, damit B nach der Ausführung gilt.

Allgemeines Prinzip

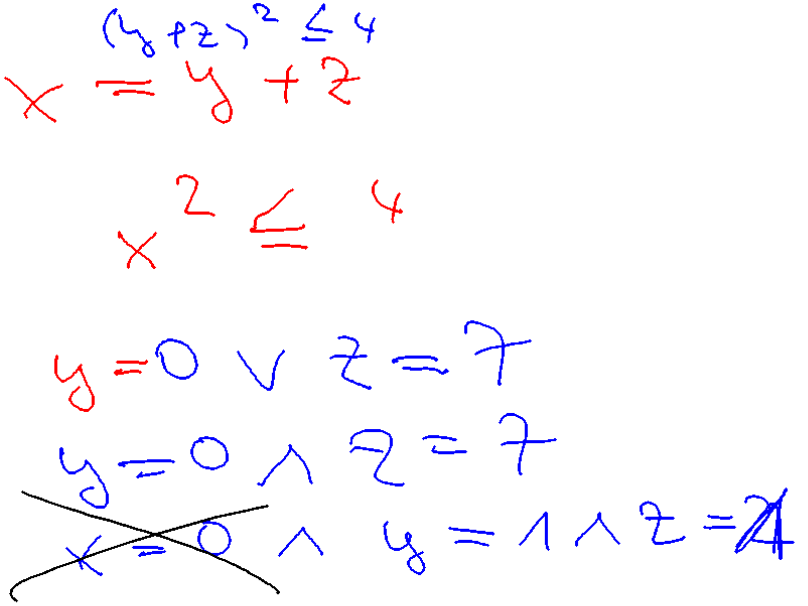
- Jede Anweisung transformiert eine Nachbedingung B in eine minimale Anforderung, die vor Ausführung erfüllt sein muss, damit B nach der Ausführung gilt.
- Im Falle einer Zuweisung `x = e;` ist diese schwächste Vorbedingung (engl.: weakest precondition) gegeben durch

$$\mathbf{WP}[\![\texttt{x = e;}]\!]\ (B) \quad \equiv \quad B[e/x]$$

Das heißt: wir substituieren einfach in B überall x durch e !!!

Beispiel

Zuweisung:	`x = x-y;`
Nachbedingung:	$x > 0$
schwächste Vorbedingung:	$x - y > 0$
stärkere Vorbedingung:	$x - y > 2$
noch stärkere Vorbedingung:	$x - y = 3$



... im GGT-Programm (1):

Zuweisung:	`x = x-y;`
Nachbedingung:	A
schwächste Vorbedingung:	

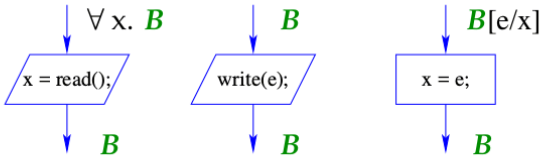
$$\begin{aligned} A[x-y/x] &\equiv ggT(a,b) = ggT(x-y,y) \\ &\equiv ggT(a,b) = ggT(x,y) \\ &\equiv A \end{aligned}$$

... im GGT-Programm (2):

Zuweisung:	`y = y-x;`
Nachbedingung:	A
schwächste Vorbedingung:	

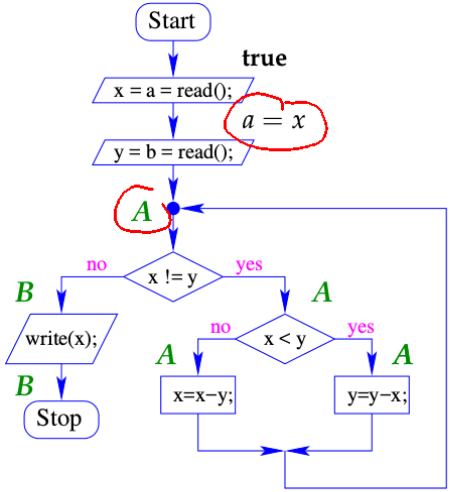
$$\begin{aligned} A[y-x/y] &\equiv ggT(a,b) = ggT(x,y-x) \\ &\equiv ggT(a,b) = ggT(x,y) \\ &\equiv A \end{aligned}$$

Zusammenstellung:

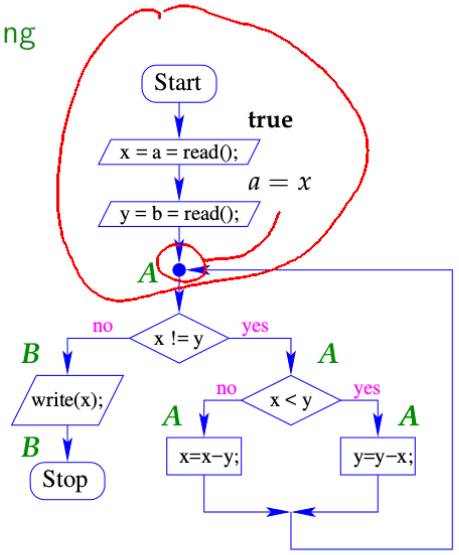


$$
\begin{aligned}
\mathbf{WP}[\![\,;\,]\!](B) &\equiv B \\
\mathbf{WP}[\![\texttt{x = e;}]\!](B) &\equiv B[e/x] \\
\mathbf{WP}[\![\texttt{x = read();}]\!](B) &\equiv \forall x.\, B \\
\mathbf{WP}[\![\texttt{write(e);}]\!](B) &\equiv B
\end{aligned}
$$

Orientierung



Orientierung



Für die Anweisungen: `b = read(); y = b;` berechnen wir:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{WP}[\![\texttt{y = b;}]\!]\,(A) &\equiv A[b/y] \\
&\equiv ggT(a,b) = ggT(x,b)
\end{aligned}
$$

Für die Anweisungen: `b = read(); y = b;` berechnen wir:

$$\begin{aligned}\mathbf{WP}[\![\texttt{y = b;}]\!]\,(A) &\equiv A[b/y]\\ &\equiv ggT(a,b) = ggT(x,b)\end{aligned}$$

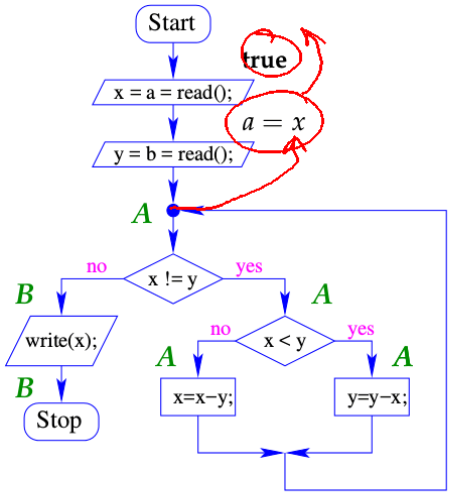
$$\begin{aligned}\mathbf{WP}[\![\texttt{b = read();}]\!]\,(ggT(a,b) = ggT(x,b))\\ &\equiv \forall b.\, ggT(a,b) = ggT(x,b)\\ &\Leftarrow a = x\end{aligned}$$

Für die Anweisungen: `b = read(); y = b;` berechnen wir:

$$\begin{aligned}\mathbf{WP}[\![\texttt{y = b;}]\!]\,(A) &\equiv A[b/y]\\ &\equiv ggT(a,b) = ggT(x,b)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{WP}[\![\texttt{b = read();}]\!]\,(ggT(a,b) = ggT(x,b))\\ &\equiv \forall b.\, ggT(a,b) = ggT(x,b)\\ &\Leftarrow a = x\end{aligned}$$

Orientierung

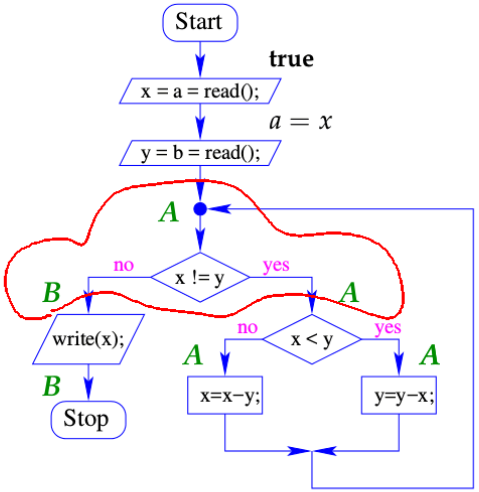


Für die Anweisungen: `a = read(); x = a;` berechnen wir:

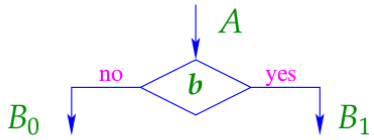
$$\begin{aligned}\mathbf{WP}[\![\texttt{x = a;}]\!]\,(a = x) &\equiv a = a\\ &\equiv \mathbf{true}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{WP}[\![\texttt{a = read();}]\!]\,(\mathbf{true}) &\equiv \forall a.\, \mathbf{true}\\ &\equiv \mathbf{true}\end{aligned}$$

Orientierung



Teilproblem 2: Verzweigungen



Es sollte gelten:

- $A \wedge \neg b \Rightarrow B_0$ und
- $A \wedge b \Rightarrow B_1$.

Das ist der Fall, falls A die schwächste Vorbedingung der Verzweigung:

$$\mathbf{WP}[\![b]\!]\,(B_0, B_1) \;\equiv\; ((\neg b) \Rightarrow B_0) \;\wedge\; (b \Rightarrow B_1)$$

impliziert.

Das ist der Fall, falls A die schwächste Vorbedingung der Verzweigung:

$$\mathbf{WP}[\![b]\!]\,(B_0, B_1) \;\equiv\; ((\neg b) \Rightarrow B_0) \;\wedge\; (b \Rightarrow B_1)$$

impliziert.

Die schwächste Vorbedingung können wir umschreiben in:

$$\begin{aligned}\mathbf{WP}[\![b]\!]\,(B_0, B_1) &\equiv (b \vee B_0) \wedge (\neg b \vee B_1)\\ &\equiv (\neg b \wedge B_0) \vee (b \wedge B_1) \vee (B_0 \wedge B_1)\\ &\equiv (\neg b \wedge B_0) \vee (b \wedge B_1)\end{aligned}$$

Beispiel

$$B_0 \equiv x > y \wedge y > 0 \qquad B_1 \equiv y > x \wedge x > 0$$

Sei b die Bedingung $y > x$.

Dann ist die schwächste Vorbedingung:

Beispiel

$$B_0 \equiv x > y \wedge y > 0 \qquad B_1 \equiv y > x \wedge x > 0$$

Sei b die Bedingung $y > x$.

Dann ist die schwächste Vorbedingung:

$$\begin{aligned} & (x > y \wedge y > 0) \vee (y > x \wedge x > 0) \\ \equiv \quad & x > 0 \wedge y > 0 \wedge x \neq y \end{aligned}$$

... im GGT-Beispiel

$$\begin{aligned} b \quad &\equiv \quad y > x \\ \neg b \wedge A \quad &\equiv \quad x \geq y \wedge ggT(a,b) = ggT(x,y) \\ b \wedge A \quad &\equiv \quad y > x \wedge ggT(a,b) = ggT(x,y) \end{aligned}$$

... im GGT-Beispiel

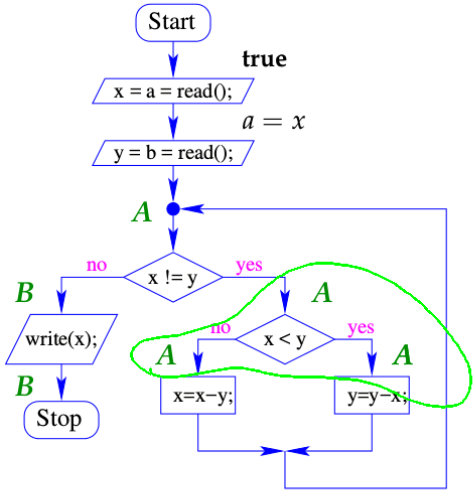
$$\begin{aligned} b \quad &\equiv \quad y > x \\ \neg b \wedge A \quad &\equiv \quad x \geq y \wedge ggT(a,b) = ggT(x,y) \\ b \wedge A \quad &\equiv \quad y > x \wedge ggT(a,b) = ggT(x,y) \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Die schwächste Vorbedingung ist:

$$ggT(a,b) = ggT(x,y)$$

... also genau A

Orientierung



Analog argumentieren wir für die Zusicherung vor der Schleife:

$$b \equiv y \neq x$$

$$\neg b \wedge B \equiv B$$
$$b \wedge A \equiv A \wedge x \neq y$$

$A \wedge (x = y \vee x \neq y)$

$\Longrightarrow$ $A \equiv (A \wedge x = y) \vee (A \wedge x \neq y)$ ist die schwächste Vorbedingung für die Verzweigung.

Analog argumentieren wir für die Zusicherung vor der Schleife:

$$b \equiv y \neq x$$

$$\neg b \wedge B \equiv B$$
$$b \wedge A \equiv A \wedge x \neq y$$

$\Longrightarrow$ $A \equiv (A \wedge x = y) \vee (A \wedge x \neq y)$ ist die schwächste Vorbedingung für die Verzweigung.

Zusammenfassung der Methode

- Annotiere jeden Programmpunkt mit einer Zusicherung.
- Überprüfe für jede Anweisung s zwischen zwei Zusicherungen A und B, dass A die schwächste Vorbedingung von s für B impliziert, d.h.:
$$A \Rightarrow \mathbf{WP}[\![s]\!](B)$$
- Überprüfe entsprechend für jede Verzweigung mit Bedingung b, ob die Zusicherung A vor der Verzweigung die schwächste Vorbedingung für die Nachbedingungen B_0 und B_1 der Verzweigung impliziert, d.h.
$$A \Rightarrow \mathbf{WP}[\![b]\!]\ (B_0, B_1)$$

Solche Annotierungen nennen wir lokal konsistent.

Erinnerung (1):

- In MiniJava können wir ein Zustand σ aus einer Variablen-Belegung, d.h. einer Abbildung der Programm-Variablen auf ganze Zahlen (ihren Werten), z.B.:

$$\sigma = \{x \mapsto 5, y \mapsto -42\}$$

Analog argumentieren wir für die Zusicherung vor der Schleife:

$$\begin{aligned} b &\equiv y \neq x \\ \neg b \wedge B &\equiv B \\ b \wedge A &\equiv A \wedge x \neq y \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ $A \equiv (A \wedge x = y) \vee (A \wedge x \neq y)$ ist die schwächste Vorbedingung für die Verzweigung.

Erinnerung (1):

- In MiniJava können wir ein Zustand σ aus einer Variablen-Belegung, d.h. einer Abbildung der Programm-Variablen auf ganze Zahlen (ihren Werten), z.B.:

$$\sigma = \{x \mapsto 5, y \mapsto -42\}$$

Erinnerung (1):

- In MiniJava können wir ein Zustand σ aus einer Variablen-Belegung, d.h. einer Abbildung der Programm-Variablen auf ganze Zahlen (ihren Werten), z.B.:

$$\sigma = \{x \mapsto 5, y \mapsto -42\}$$

- Ein Zustand σ erfüllt eine Zusicherung A, falls

$$A[\sigma(x)/x]_{x \in A}$$

// wir substituieren jede Variable in A durch ihren Wert in σ eine wahre Aussage ist, d.h. äquivalent **true**.

Wir schreiben: $\sigma \models A$.

Beispiel:

$$
\begin{array}{lcl}
\sigma & = & \{x \mapsto 5, y \mapsto 2\} \\
A & \equiv & (x > y) \\
A[5/x, 2/y] & \equiv & (5 > 2) \\
 & \equiv & \textbf{true}
\end{array}
$$

Beispiel:

$$
\begin{array}{lcl}
\sigma & = & \{x \mapsto 5, y \mapsto 2\} \\
A & \equiv & (x > y) \\
A[5/x, 2/y] & \equiv & (5 > 2) \\
 & \equiv & \textbf{true}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lcl}
\sigma & = & \{x \mapsto 5, y \mapsto 12\} \\
A & \equiv & (x > y) \\
A[5/x, 12/y] & \equiv & (5 > 12) \\
 & \equiv & \textbf{false}
\end{array}
$$

Triviale Eigenschaften:

$$\sigma \models \textbf{true} \quad \text{für jedes } \sigma$$
$$\sigma \models \textbf{false} \quad \text{für kein } \sigma$$

$\sigma \models A_1$ und $\sigma \models A_2$ ist äquivalent zu $\sigma \models A_1 \wedge A_2$

$\sigma \models A_1$ oder $\sigma \models A_2$ ist äquivalent zu $\sigma \models A_1 \vee A_2$

Erinnerung (2):

- Eine Programmausführung π durchläuft einen Pfad im Kontrollfluss-Graphen.
- Sie beginnt in einem Programmpunkt u_0 in einem Anfangszustand σ_0 und führt in einen Programmpunkt u_m und einen Endzustand σ_m.
- Jeder Schritt der Programm-Ausführung führt eine Aktion aus und ändert Programmpunkt und Zustand.

Erinnerung (2):

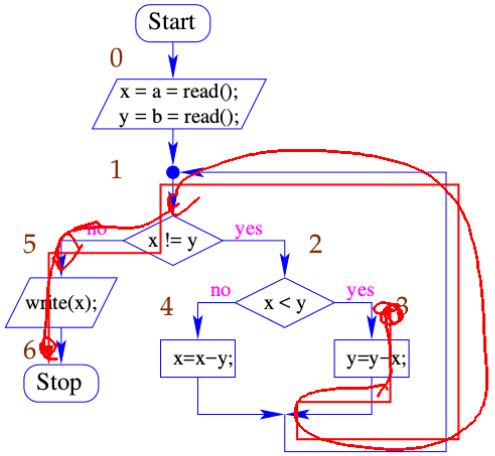
- Eine Programmausführung π durchläuft einen Pfad im Kontrollfluss-Graphen.
- Sie beginnt in einem Programmpunkt u_0 in einem Anfangszustand σ_0. und führt in einen Programmpunkt u_m und einen Endzustand σ_m.
- Jeder Schritt der Programm-Ausführung führt eine Aktion aus und ändert Programmpunkt und Zustand.

  $\Longrightarrow$ Wir können π als Folge darstellen:

  $$(u_0, \sigma_0) s_1 (u_1, \sigma_1) \ldots s_m (u_m, \sigma_m)$$

  wobei die s_i Elemente des Kontrollfluss-Graphen sind, d.h. Anweisungen oder Bedingungen ...

Beispiel:



Nehmen wir an, wir starten in Punkt 3 mit $\{x \mapsto 6, y \mapsto 12\}$.

Dann ergibt sich die Programmausführung:

$$\begin{array}{rcll} \pi & = & (3, \{x \mapsto 6, y \mapsto 12\}) & \texttt{y = y-x;} \\ & & (1, \{x \mapsto 6, y \mapsto 6\}) & \texttt{!(x != y)} \\ & & (5, \{x \mapsto 6, y \mapsto 6\}) & \texttt{write(x);} \\ & & (6, \{x \mapsto 6, y \mapsto 6\}) & \end{array}$$