Kapitel IV – Graphen; Bäume

- Binäre Wurzelbäume
  - Ein Binärbaum ist ein Wurzelbaum, in dem jeder Knoten höchstens 2 unmittelbare Nachfolger hat.
  - Ein vollständiger Binärbaum ist ein Binärbaum, in dem jeder innere Knoten genau zwei unmittelbare Nachfolger hat und alle Blätter denselben Abstand zur Wurzel haben.

  Satz: Ein binärer Wurzelbäum der Höhe k hat höchstens $2^k - 1$ Knoten und höchstens 2^{k-1} Blätter. Der vollständige Baum der Höhe k hat genau $2^k - 1$ Knoten und 2^{k-1} Blätter.

Script **generated by TTT**

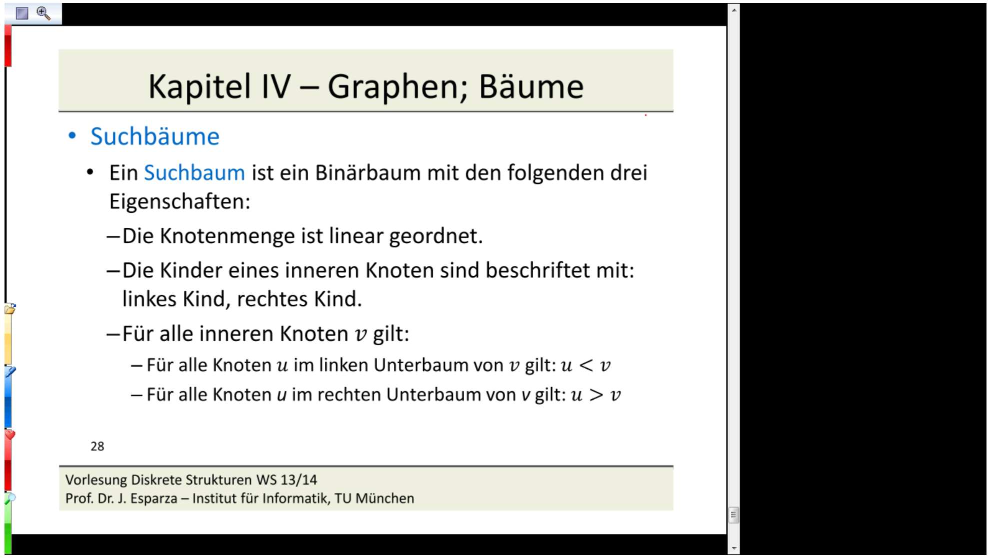
Title: Esparza: Diskrete Strukturen (1

6.01.2014)

Date: Thu Jan 16 10:17:49 CET 2014

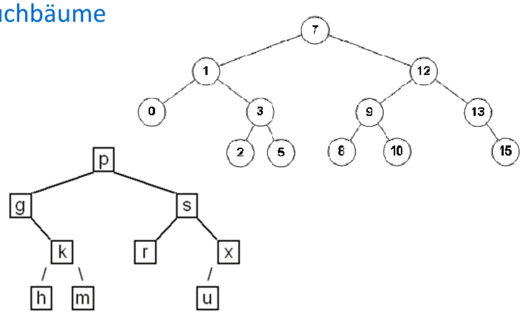
Duration: 88:55 min

Pages: 32



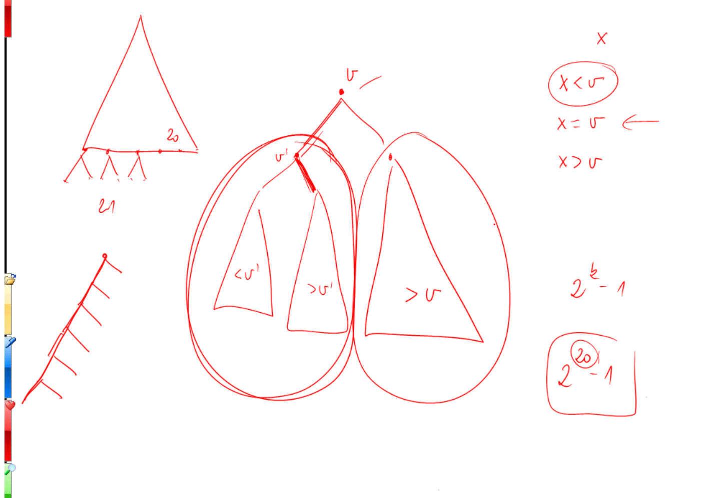
Kapitel IV – Graphen; Bäume

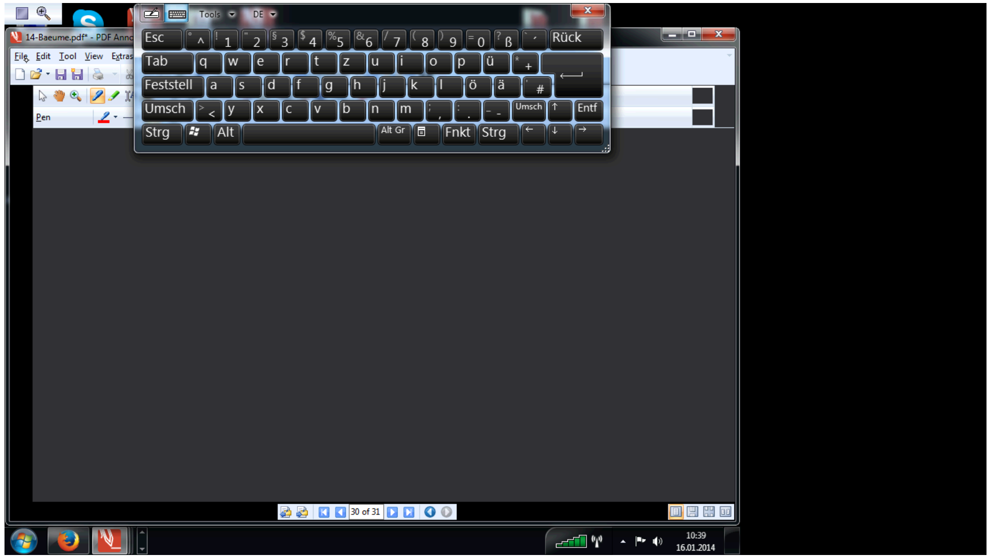
- Suchbäume



Kapitel IV – Graphen; Bäume

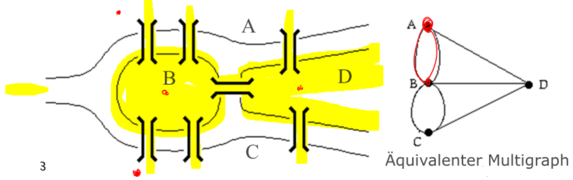
- Suchbäume
  - Ein Suchbaum ist ein Binärbaum mit den folgenden drei Eigenschaften:
    – Die Knotenmenge ist linear geordnet.
    – Die Kinder eines inneren Knoten sind beschriftet mit: linkes Kind, rechtes Kind.
    – Für alle inneren Knoten v gilt:
      – Für alle Knoten u im linken Unterbaum von v gilt: $u < v$
      – Für alle Knoten u im rechten Unterbaum von v gilt: $u > v$





Kapitel IV – Graphen; Eigenschaften

- Das Königsberger Brückenproblem (Leonhard Euler (1707-1783))
  - Können wir so durch die Stadt laufen, dass wir jede Brücke genau einmal überqueren und wieder an den Ausgangspunkt zurückkehren?



Kapitel IV – Graphen; Eigenschaften

- Euler-Touren

  Definition: Eine Euler-Tour in einem Graphen ist ein Weg, der jede Kante genau einmal enthält, und dessen Anfangs- und Endknoten identisch sind.

  Ein Graph, der eine Euler-Tour hat, heißt eulersch.

Kapitel IV – Graphen; Eigenschaften

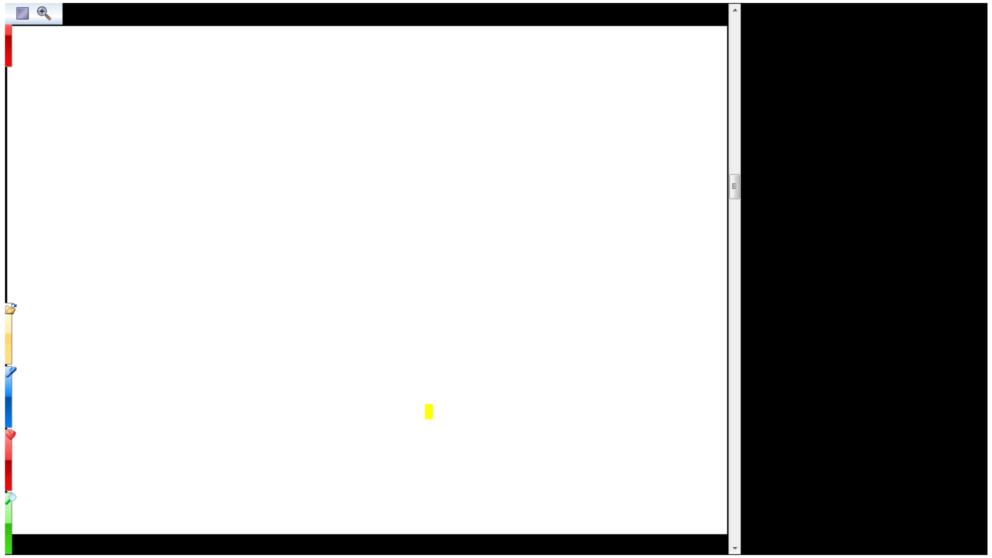
- Euler-Touren

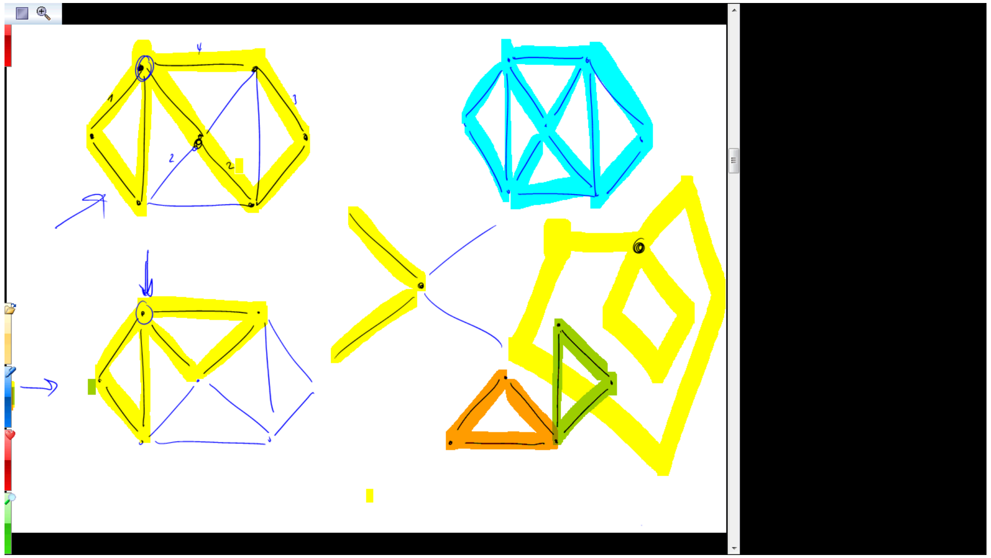
  Satz (Euler): Ein zusammenhängender Graph besitzt genau dann eine Euler-Tour, wenn alle Knoten des Graphen geraden Grad haben.

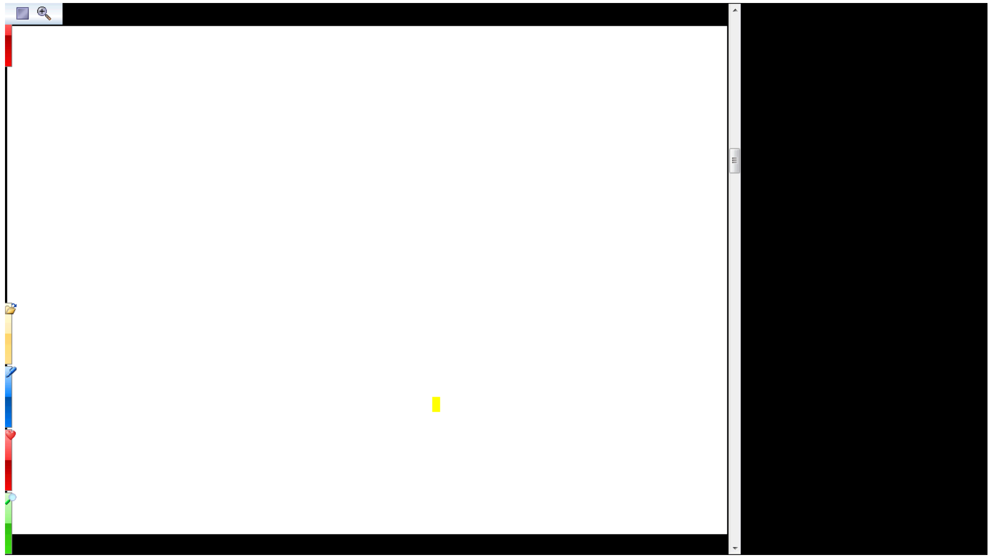
  Beweis: ($\Rightarrow$): Man geht in jeden Knoten genauso oft hinein wie man aus ihm hinausgeht.

  ($\Leftarrow$): Annahme: Zusammenhängender Graph $G = (V, E)$, alle Knoten haben geraden Grad.

  Beweis durch Induktion über $|E|$.







Kapitel IV – Graphen; Eigenschaften

- Euler-Touren

  Satz (Euler): Ein zusammenhängender Graph besitzt genau dann eine Euler-Tour, wenn alle Knoten des Graphen geraden Grad haben.

  Beweis: ($\Rightarrow$): Man geht in jeden Knoten genauso oft hinein wie man aus ihm hinausgeht.

  ($\Leftarrow$): Annahme: Zusammenhängender Graph $G = (V, E)$, alle Knoten haben geraden Grad.

  Beweis durch Induktion über $|E|$.

Kapitel IV – Graphen; Eigenschaften

- Euler-Touren

  Basis: $|E| = 0$. Dann $|V| = \{v\}$ und der Weg (v) ist eine Euler-Tour.

  Schritt: $|E| > 0$. Ausgehend von einen beliebigen Knoten v, wähle einen maximalen Weg W von Kanten, der jede Kante höchstens einmal besucht.

  W endet wieder in v (sonst gibt es wegen des geraden Grads immer eine unbesuchte Kante, mit der der Weg verlängert werden kann).

Kapitel IV – Graphen; Eigenschaften

- Euler-Touren

  Entferne aus G alle Kanten aus W. Die Knoten des entstehenden Graphen G' haben immer noch geraden Grad (man geht in jeden Knoten genauso oft hinein, wie man aus ihm hinausgeht).

  Aus der Induktionsannahme folgt: jede Zusammenhängskomponente von G'hat eine Euler-Tour.

  Wir bilden eine Euler-Tour von G wie folgt: wenn W zum ersten Mal eine Komponente von G' besucht, dann fügen wir W eine Euler-Tour der Komponente hinzu.

Kapitel IV – Graphen; Eigenschaften

- Euler-Touren

  $W = (a, b, e, f, a)$

  Komponenten von G':

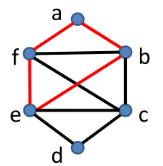
  $G_1' = (\{a\}, \emptyset)$
  $G_2' = (\{b, c, d, e, f\}, E_2)$

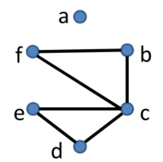
  Euler-Touren von G_1' und G_2':

  (a)
  (b, c, d, e, c, f, b)

  Euler-Tour von G :

  $(a, b, c, d, e, c, f, b, e, f, a)$





Kapitel IV – Graphen; Eigenschaften

- Hamilton-Kreise

  Definition: Ein Hamilton-Kreis in einem Graphen ist ein Kreis, der alle Knoten genau einmal enthält.

  Ein Graph heißt hamiltonsch, wenn er einen Hamilton-Kreis enthält.

Kapitel IV – Graphen; Eigenschaften

- Euler-Touren

  $W = (a, b, e, f, a)$

  Komponenten von G':

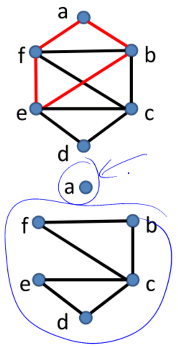
  $G_1' = (\{a\}, \emptyset)$
  $G_2' = (\{b, c, d, e, f\}, E_2)$

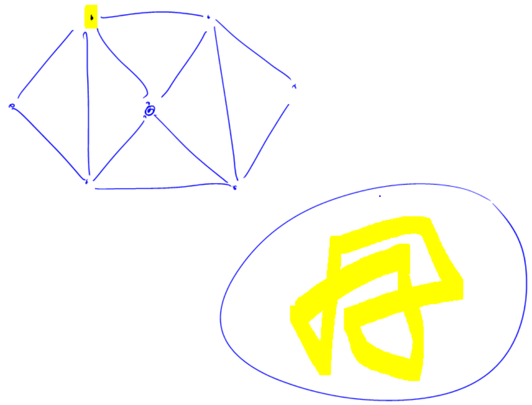
  Euler-Touren von G_1' und G_2':

  (a)
  (b, c, d, e, c, f, b)

  Euler-Tour von G :

  $(a, b, c, d, e, c, f, b, e, f, a)$





Kapitel IV – Graphen; Eigenschaften

- Hamilton-Kreise

  Definition: Ein Hamilton-Kreis in einem Graphen ist ein Kreis, der alle Knoten genau einmal enthält.

  Ein Graph heißt hamiltonsch, wenn er einen Hamilton-Kreis enthält.

Kapitel IV – Graphen; Eigenschaften

- Euler-Touren

  Definition: Eine Euler-Tour in einem Graphen ist ein Weg, der jede Kante genau einmal enthält, und dessen Anfangs- und Endknoten identisch sind.

  Ein Graph, der eine Euler-Tour hat, heißt eulersch.

Kapitel IV – Graphen; Eigenschaften

- Hamilton-Kreise

  Das Problem des Rösselsprungs auf dem Schachbrett:

  – Hierbei handelt es sich um das Problem, mit einem Springer alle Felder eines Schachbretts genau einmal zu erreichen und wieder zum Ausgangsfeld zurückzukehren.

Kapitel IV – Graphen; Eigenschaften

- Hamilton-Kreise

  Das Problem des Rösselsprungs auf dem Schachbrett:

  – Hierbei handelt es sich um das Problem, mit einem Springer alle Felder eines Schachbretts genau einmal zu erreichen und wieder zum Ausgangsfeld zurückzukehren.

Kapitel IV – Graphen; Eigenschaften

- Hamilton-Kreise

  Das Problem des Rösselsprungs auf dem Schachbrett – eine von Euler gefundene Lösung.

58	43	60	37	52	41	62	35
49	46	57	42	61	36	53	40
44	59	48	51	38	55	34	63
47	50	45	56	33	64	39	54
22	7	32	1	24	13	18	15
31	2	23	6	19	16	27	12
8	21	4	49	10	25	14	17
3	30	9	20	5	28	11	26

Kapitel IV – Graphen; Eigenschaften

- Hamilton-Kreise

  Die Aufgabe, einen Hamilton-Kreis zu finden, ist wesentlich schwerer als eine Euler-Tour zu finden; es ist ein NP-vollständiges Problem.

  Das systematische Ausprobieren aller Möglichkeiten ist für eine große Anzahl von Knoten nicht möglich, da es $O(n!)$ Möglichkeiten gibt.

Kapitel IV – Graphen; Eigenschaften

- Hamiltonsche Graphen

  Wir geben eine hinreichende Bedingung für die Existenz eines Hamilton-Kreises an.

  Satz (Kriterium von Ore): Sei G ein zusammenhängender Graph mit n Knoten (keine Mehrfachkanten). Ist die Summe des Grades je zweier nicht-adjazenter Knoten mindestens n, so enthält G einen Hamilton-Kreis.

Kapitel IV – Graphen; Eigenschaften

- Hamiltonsche Graphen