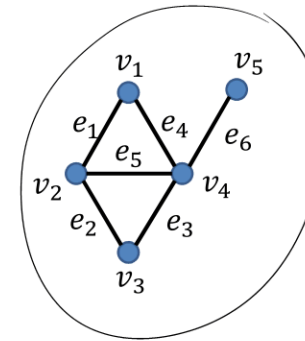


Title: Esparza: TestDS (14.01.2014)
 Date: Tue Jan 14 13:48:58 CET 2014
 Duration: 93:03 min
 Pages: 39

Kapitel IV – Graphen; Grundlagen

Adjazenz- und Inzidenzmatrix



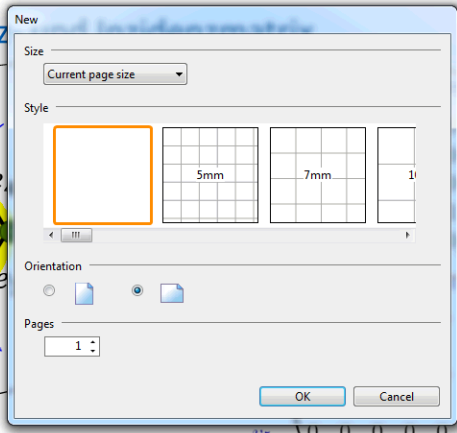
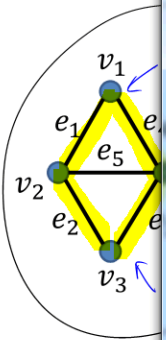
$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$B = \begin{matrix} & \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

A^2
 $(A \times A)_{13} = 2$
 $(0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2$
 $0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 = 2$

Kapitel IV – Graphen; Grundlagen

Adjazenz- und Inzidenzmatrix



A^2 $v_1 - v_2$
 A^3 $v_2 - v_3$
 $(A \times A)_{13} = 2$
 $(0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2$
 $0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 = 2$

Kapitel IV – Graphen; Grundlagen

Isomorphe (strukturgleiche) Graphen

Zwei Graphen $G = (V, E)$ und $G' = (V', E')$ heißen **isomorph** (in Zeichen $G \cong G'$), falls es eine Bijektion $h: V \rightarrow V'$ gibt mit der Eigenschaft:

$$\forall u, v \in V: \{u, v\} \in E \leftrightarrow \{h(u), h(v)\} \in E'$$

Die Abbildung h ist dann ein **Homomorphismus** (technische Bezeichnung einer **Umbenennung**) der Knotenmenge V .

Kapitel IV – Graphen; Bäume

Eigenschaften von Bäumen

Satz: Ist $T = (V, E)$ ein Baum mit $|V| \geq 2$ Knoten und $v \in V$ ein Blatt, so ist der Graph $T[V \setminus \{v\}]$ ebenfalls ein Baum.

Beweis: Durch Wegnahme eines Blattes bleibt der Baum kreisfrei. Da Pfade zwischen beliebigen Knoten u und w mit $u \neq v \neq w$ erhalten bleiben, ist $T[V \setminus \{v\}]$ auch zusammenhängend. \square

7

Kapitel IV – Graphen; Bäume

Eigenschaften von Bäumen

Satz: Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

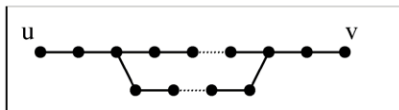
- (1) $G = (V, E)$ ist ein Baum
- (2) Je zwei Knoten $u, v \in V$ sind durch genau einen Pfad verbunden
- (3) G ist zusammenhängend und $|V| = |E| + 1$.

11

Kapitel III – Graphen; Bäume

Eigenschaften von Bäumen

(1) \Leftrightarrow (2). G hat keinen Kreis gdw. keine zwei Knoten durch zwei verschiedene Pfade verbunden sind.



G ist zusammenhängend gdw. jede zwei Knoten durch mindestens einen Pfad verbunden sind.

12

Kapitel IV – Graphen; Bäume

Eigenschaften von Bäumen

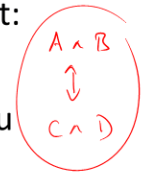
Satz: Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (1) $G = (V, E)$ ist ein Baum
- (2) Je zwei Knoten $u, v \in V$ sind durch genau einen Pfad verbunden
- (3) G ist zusammenhängend und $|V| = |E| + 1$.

$$(1) \Leftrightarrow (3) \quad (1) \Leftrightarrow (2) \quad (1) \rightarrow (2)$$

$$(1) \rightarrow (2) \quad (2) \rightarrow (1) \quad (2) \rightarrow (1)$$

$$(A \wedge B) \Leftrightarrow (C \wedge D) \quad (1)$$



$$\begin{array}{ccc} A & & B \\ \updownarrow & \wedge & \updownarrow \\ C & & D \end{array}$$

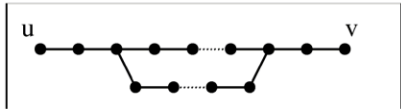
$$(A \Leftrightarrow C) \wedge (B \Leftrightarrow D) \quad (2)$$

11

Kapitel III – Graphen; Bäume

Eigenschaften von Bäumen

→ (1) \Leftrightarrow (2). G hat keinen Kreis gdw. keine zwei Knoten durch zwei verschiedene Pfade verbunden sind.



G ist zusammenhängend gdw. jede zwei Knoten durch mindestens einen Pfad verbunden sind.

12

Kapitel IV – Graphen; Bäume

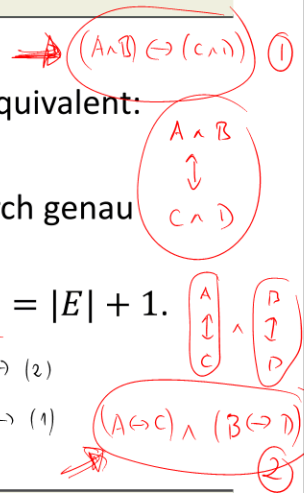
Eigenschaften von Bäumen

Satz: Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (1) $G = (V, E)$ ist ein Baum
- (2) Je zwei Knoten $u, v \in V$ sind durch genau einen Pfad verbunden
- (3) G ist zusammenhängend und $|V| = |E| + 1$.

$$(1) \Leftrightarrow (3) \quad (1) \Leftrightarrow (2) \quad (1) \rightarrow (2)$$

$$(1) \rightarrow (2) \quad (2) \rightarrow (3) \quad (3) \rightarrow (1) \quad (2) \rightarrow (1)$$



11

Kapitel III – Graphen; Bäume

Eigenschaften von Bäumen

→ (1) \Rightarrow (3). Sei $G = (V, E)$ ein Baum. Wir zeigen $|V| = |E| + 1$ durch Induktion über $|V|$:

Basis: $|V| = 1$. Dann gilt $|E| = 0$ und wir sind fertig.

Schritt: $|V| \geq 2$. Sei u ein Blatt von G (G hat mindestens zwei Blätter).

Entferne u sowie die Kante, die u mit dem Rest von G verbindet. Sei $G' = (V', E')$ der resultierende Baum.

Mit $|V'| < |V|$ gilt $|V'| = |E'| + 1$ (**Induktionsannahme**).

Mit $|V| = |V'| + 1$ und $|E| = |E'| + 1$ gilt $|V| = |E| + 1$.

13

Kapitel III – Graphen; Bäume

Eigenschaften von Bäumen

(3) \Rightarrow (1). Sei $G = (V, E)$ zusammenhängend mit $|V| = |E| + 1$.

G enthält einen Spannbaum $T = (V, E')$.

Nach dem eben Bewiesenen gilt $|V| = |E'| + 1$.

Aus $|V| = |E| + 1$ und $|V| = |E'| + 1$ folgt $|E| = |E'|$.

Da E' eine Teilmenge von E ist, gilt $E = E'$.

Es folgt $G = T$. \square

14

Kapitel IV – Graphen; Bäume

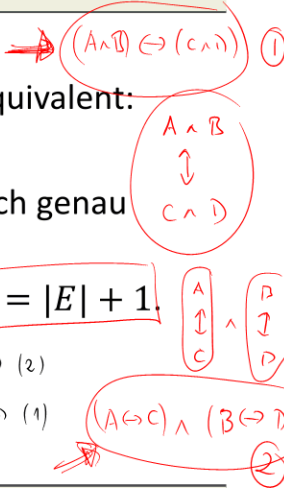
Eigenschaften von Bäumen

Satz: Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (1) $G = (V, E)$ ist ein Baum
- (2) Je zwei Knoten $u, v \in V$ sind durch genau einen Pfad verbunden
- (3) G ist zusammenhängend und $|V| = |E| + 1$.

$$(1) \Leftrightarrow (3) \quad (1) \Leftrightarrow (2) \quad (1) \rightarrow (2)$$

$$(1) \rightarrow (2) \quad (2) \rightarrow (1) \quad (1) \rightarrow (1) \quad (2) \rightarrow (1)$$



11

Kapitel IV – Graphen; Bäume

Eigenschaften von Bäumen

Korollar: Seien $T = (V, E)$ ein Baum mit $|V| = n$ und (d_1, d_2, \dots, d_n) die Gradfolge von T . Es gilt:

$$\sum_{i=1}^n d_i = 2|E| = 2|V| - 2 = 2n - 2$$

15

Kapitel III – Graphen; Bäume

Eigenschaften von Bäumen

$(1) \Rightarrow (3)$. Sei $G = (V, E)$ ein Baum. Wir zeigen $|V| = |E| + 1$ durch Induktion über $|V|$:

Basis: $|V| = 1$. Dann gilt $|E| = 0$ und wir sind fertig.

Schritt: $|V| \geq 2$. Sei u ein Blatt von G (G hat mindestens zwei Blätter).

Entferne u sowie die Kante, die u mit dem Rest von G verbindet. Sei $G' = (V', E')$ der resultierende Baum.

Mit $|V'| < |V|$ gilt $|V'| = |E'| + 1$ (Induktionsannahme).

Mit $|V| = |V'| + 1$ und $|E| = |E'| + 1$ gilt $|V| = |E| + 1$.

13

Kapitel IV – Graphen; Bäume

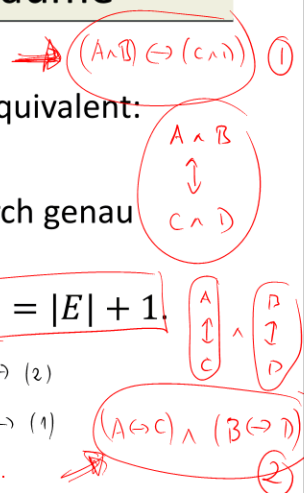
Eigenschaften von Bäumen

Satz: Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (1) $G = (V, E)$ ist ein Baum
- (2) Je zwei Knoten $u, v \in V$ sind durch genau einen Pfad verbunden
- (3) G ist zusammenhängend und $|V| = |E| + 1$.

$$(1) \Leftrightarrow (3) \quad (1) \Leftrightarrow (2) \quad (1) \rightarrow (2)$$

$$(1) \rightarrow (2) \quad (2) \rightarrow (1) \quad (1) \rightarrow (1) \quad (2) \rightarrow (1)$$



11

Kapitel IV – Graphen; Bäume

- Mehr zu Spannbäumen

Satz: Die Anzahl aufspannender Bäume des vollständigen Graphen mit $V = \{1, \dots, n\}$ beträgt

$$t(n) = n^{n-2}.$$

(Achtung: die Knoten sind unterscheidbar!)

$$t(2) = 1 \quad t(5) = 625 \quad t(8) = 262144$$

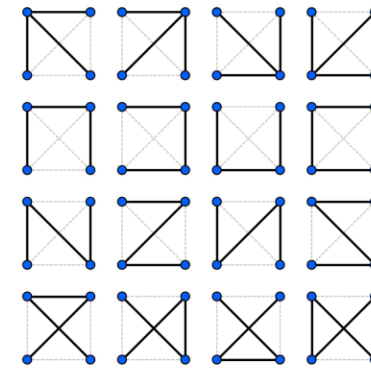
$$t(3) = 3 \quad t(6) = 1296 \quad t(9) = 4782969$$

$$t(4) = 16 \quad t(7) = 16807 \quad t(10) = 10^8$$

16

Kapitel IV – Graphen; Bäume

- Die 16 Spannbäume des K_4 (Wikipedia)



17

Kapitel IV – Graphen; Bäume

- Spannbäume

Satz (Cayley): Es gibt n^{n-2} markierte Bäume mit n Knoten.

Beweis: Wir definieren eine Abbildung (**Prüfer-Codes**) von der Menge der markierten Bäume mit n Knoten in die Menge $\{1, \dots, n\}^{n-2}$ (siehe die nächsten Folien).

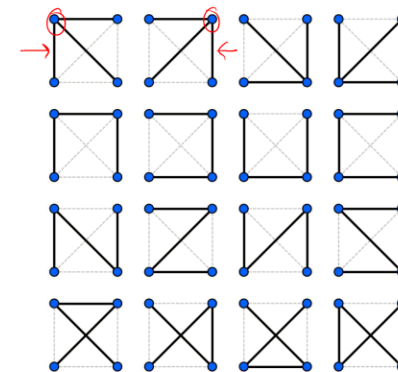
Wir zeigen, dass diese Abbildung eine Bijektion ist (siehe Lemma).

Es folgt, dass die Anzahl der markierten Bäumen gleich $|\{1, \dots, n\}^{n-2}| = n^{n-2}$ ist. \square

18

Kapitel IV – Graphen; Bäume

- Die 16 Spannbäume des K_4 (Wikipedia)



$$4^{4-2} = 16$$

17

Kapitel IV – Graphen; Bäume

- Prüfer-Codes (Heinz Prüfer 1896-1934).

Eingabe: Baum $T = (V, E)$ mit $V = \{1, 2, \dots, n\}$, $n \geq 2$.

Wiederhole bis $|V| = 2$:

Sei $v \in V$ das kleinste Blatt von V .

Sei $u \in V$ der einzige Nachbar von v in V .

Setze $V := V \setminus \{v\}$ und $E := E \setminus \{\{u, v\}\}$.

Gebe u aus. (**Achtung:** u , nicht v !)

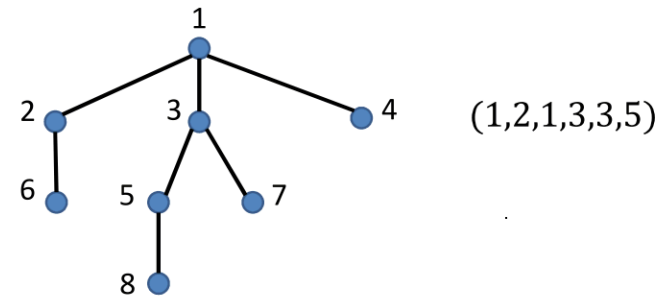
Ausgabe: Folge (u_1, \dots, u_{n-2}) , genannt **Prüfer-Code** von T .

19

Kapitel IV – Graphen; Bäume

- Prüfer-Codes <http://mathworld.wolfram.com/PrueferCode.html>

Beispiel:



20

Kapitel IV – Graphen; Bäume

- Prüfer-Codes

Lemma: Zu einem gegebenen Prüfer-Code $\gamma = (p_1, \dots, p_{n-2})$ mit Elementen aus $[n] = \{1, \dots, n\}$ gibt es einen **eindeutigen** markierten Baum T_γ mit Knotenmenge $[n]$.

Beweis: Durch Induktion über die Länge des Codes.

Basis: $n = 2$. Es gibt genau einen Baum mit Knotenmenge $\{1, 2\}$.

Schritt: $n > 2$. Das erste Blatt b_1 , das gepflückt wurde, ist der kleinste Knoten in $[n] \setminus \{p_1, \dots, p_{n-2}\}$.

Mit der Ind.Vor. gibt es einen eindeutigen Baum $T_{\gamma'} = (V', E')$ für $\gamma' = (p_2, \dots, p_{n-2})$.

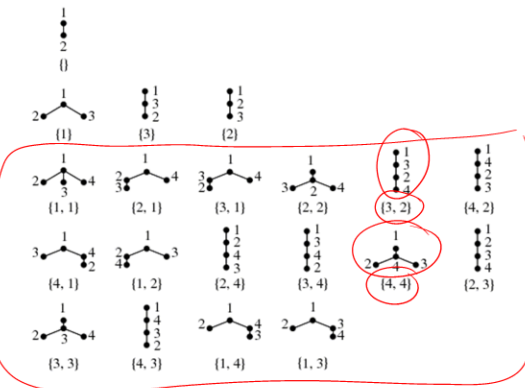
Es gilt $T_\gamma = (V' \cup \{b_1\}, E' \cup \{\{b_1, p_1\}\})$. \square

22

Kapitel IV – Graphen; Bäume

- Prüfer-Codes <http://mathworld.wolfram.com/PrueferCode.html>

Beispiel:



21

Kapitel IV – Graphen; Bäume

• Prüfer-Codes

Lemma: Zu einem gegebenen Prüfer-Code $\gamma = (p_1, \dots, p_{n-2})$ mit Elementen aus $[n] = \{1, \dots, n\}$ gibt es einen **eindeutigen** markierten Baum T_γ mit Knotenmenge $[n]$.

Beweis: Durch Induktion über die Länge des Codes.

Basis: $n = 2$. Es gibt genau einen Baum mit Knotenmenge $\{1, 2\}$.

Schritt: $n > 2$. Das erste Blatt b_1 , das gepflückt wurde, ist der kleinste Knoten in $[n] \setminus \{p_1, \dots, p_{n-2}\}$.

Mit der Ind.Vor. gibt es einen eindeutigen Baum $T_{\gamma'} = (V', E')$ für $\gamma' = (p_2, \dots, p_{n-2})$.

Es gilt $T_\gamma = (V' \cup \{b_1\}, E' \cup \{\{b_1, p_1\}\})$. \square

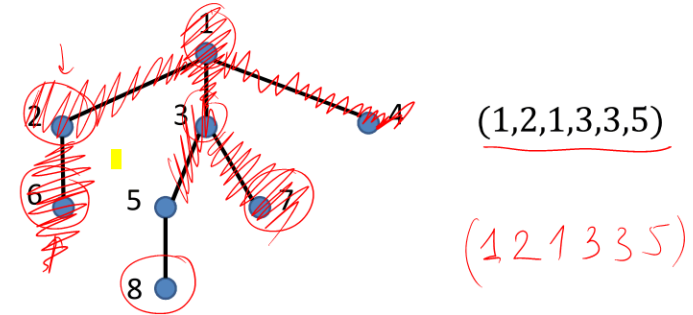
22

Kapitel IV – Graphen; Bäume

• Prüfer-Codes

<http://mathworld.wolfram.com/PrueferCode.html>

Beispiel:



20

Kapitel IV – Graphen; Bäume

• Prüfer-Codes

Lemma: Zu einem gegebenen Prüfer-Code $\gamma = (p_1, \dots, p_{n-2})$ mit Elementen aus $[n] = \{1, \dots, n\}$ gibt es einen **eindeutigen** markierten Baum T_γ mit Knotenmenge $[n]$.

Beweis: Durch Induktion über die Länge des Codes.

Basis: $n = 2$. Es gibt genau einen Baum mit Knotenmenge $\{1, 2\}$.

Schritt: $n > 2$. Das erste Blatt b_1 , das gepflückt wurde, ist der kleinste Knoten in $[n] \setminus \{p_1, \dots, p_{n-2}\}$.

Mit der Ind.Vor. gibt es einen eindeutigen Baum $T_{\gamma'} = (V', E')$ für $\gamma' = (p_2, \dots, p_{n-2})$.

Es gilt $T_\gamma = (V' \cup \{b_1\}, E' \cup \{\{b_1, p_1\}\})$. \square

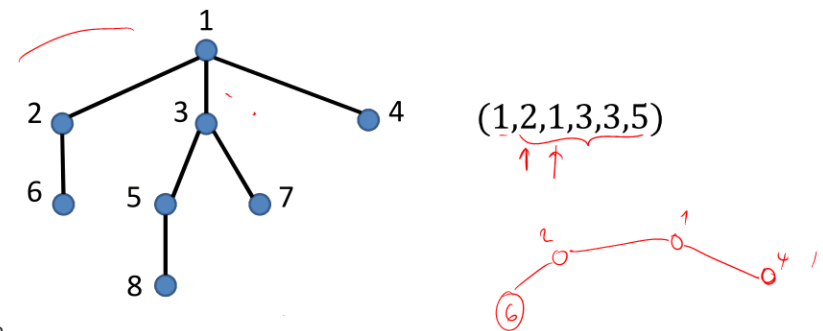
22

Kapitel IV – Graphen; Bäume

• Prüfer-Codes

<http://mathworld.wolfram.com/PrueferCode.html>

Beispiel:



20

Kapitel IV – Graphen; Bäume

- Prüfer-Codes (Heinz Prüfer 1896-1934).

Eingabe: Baum $T = (V, E)$ mit $V = \{1, 2, \dots, n\}$, $n \geq 2$.

Wiederhole bis $|V| = 2$:

Sei $v \in V$ das kleinste Blatt von V .

Sei $u \in V$ der einzige Nachbar von v in V .

Setze $V := V \setminus \{v\}$ und $E := E \setminus \{\{u, v\}\}$.

Gebe u aus. (**Achtung: u , nicht v !**)

Ausgabe: Folge (u_1, \dots, u_{n-2}) , genannt **Prüfer-Code** von T .

19

Kapitel IV – Graphen; Bäume

- Wurzelbäume

Definition: Ein **Wurzelbaum** (**rooted tree**) ist ein Tupel (T, v) wobei $T = (V, E)$ ein Baum ist und $v \in V$ ein Knoten, den man auch als **Wurzel** des Baumes bezeichnet.

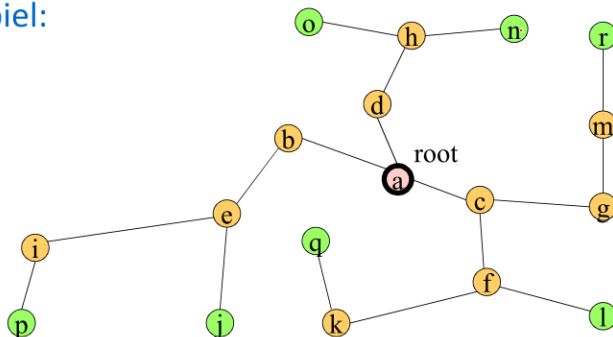
- Da es in einem Baum zwischen je zwei Knoten genau einen Pfad gibt, gibt es in einem Wurzelbaum von jedem Knoten genau einen Pfad zur Wurzel.

23

Kapitel IV – Graphen; Bäume

- Wurzelbäume

Beispiel:



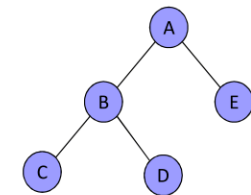
24

Kapitel IV – Graphen; Bäume

- Wurzelbäume

Im Bild eines Wurzelbaumes wird die Wurzel in der Regel oben angeordnet, und die Wege werden von der Wurzel weggerichtet betrachtet.

- Wurzelbäume dienen zur graphischen Darstellung hierarchischer Strukturen, z.B. Vererbungen, Stammbäume, grammatikalische Strukturen usw.



25

Kapitel IV – Graphen; Bäume

- **Vorgänger, Nachfolger, Kind, Höhe**
 - Die Knoten entlang eines Pfades von $v \in V$ zur Wurzel heißen **Vorgänger** von v .
 - Der zu v benachbarte Vorgänger ist der **Vater** bzw. die **Mutter** von v .
 - Die Knoten $u \in V$, von denen der Pfad zur Wurzel den Knoten $v \in V$ enthält, heißen **Nachfolger** von v .
 - Die zu v benachbarten Nachfolger sind die **Kinder** von v .
 - Die **Höhe** $h(T)$ eines Baumes T ist die Länge des längsten Pfades von der Wurzel zu einem der Blätter plus 1.

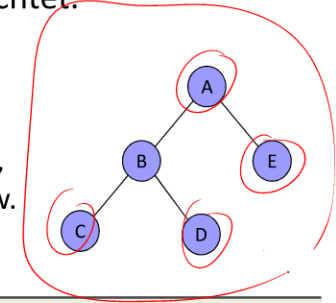
26

Kapitel IV – Graphen; Bäume

- **Wurzelbäume**

Im Bild eines Wurzelbaumes wird die Wurzel in der Regel oben angeordnet, und die Wege werden von der Wurzel weggerichtet betrachtet.

- Wurzelbäume dienen zur graphischen Darstellung hierarchischer Strukturen, z.B. Vererbungen, Stammbäume, grammatikalische Strukturen usw.



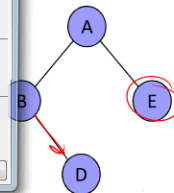
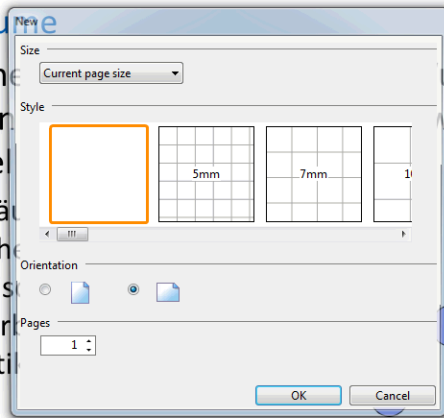
25

Kapitel IV – Graphen; Bäume

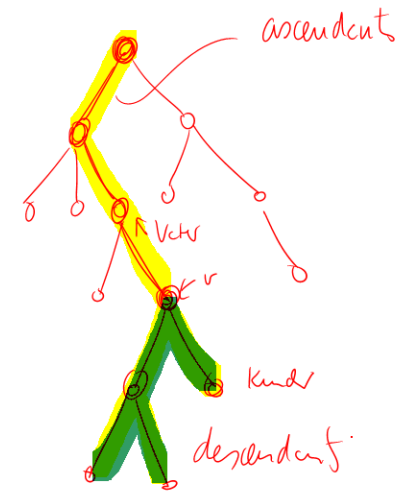
- **Wurzelbäume**

Im Bild eines Wurzelbaumes wird die Wurzel in der Regel oben angeordnet, und die Wege werden von der Wurzel weggerichtet betrachtet.

 - Wurzelbäume dienen zur graphischen Darstellung hierarchischer Strukturen, z.B. Vererbungen, grammatikalische Strukturen usw.



25



Kapitel IV – Graphen; Bäume

- **Vorgänger, Nachfolger, Kind, Höhe**
 - Die Knoten entlang eines Pfades von $v \in V$ zur Wurzel heißen **Vorgänger** von v .
 - Der zu v benachbarte Vorgänger ist der **Vater** bzw. die **Mutter** von v .
 - Die Knoten $u \in V$, von denen der Pfad zur Wurzel den Knoten $v \in V$ enthält, heißen **Nachfolger** von v .
 - Die zu v benachbarten Nachfolger sind die **Kinder** von v .
 - Die **Höhe** $h(T)$ eines Baumes T ist die Länge des längsten Pfades von der Wurzel zu einem der Blätter plus 1.

26

Kapitel IV – Graphen; Bäume

- **Binäre Wurzelbäume**
 - Ein **Binärbaum** ist ein Wurzelbaum, in dem jeder Knoten höchstens 2 unmittelbare Nachfolger hat.
 - Ein **vollständiger** Binärbaum ist ein Binärbaum, in dem jeder innere Knoten genau zwei unmittelbare Nachfolger hat und alle Blätter denselben Abstand zur Wurzel haben.
- Satz:** Ein binärer Wurzelbaum der Höhe k hat höchstens $2^k - 1$ Knoten und höchstens 2^{k-1} Blätter. Der vollständige Baum der Höhe k hat genau $2^k - 1$ Knoten und 2^{k-1} Blätter.

27

Kapitel IV – Graphen; Bäume

- **Suchbäume**
 - Ein **Suchbaum** ist ein Binärbaum mit den folgenden drei Eigenschaften:
 - Die Knotenmenge ist linear geordnet.
 - Die Kinder eines inneren Knoten sind beschriftet mit: linkes Kind, rechtes Kind.
 - Für alle inneren Knoten v gilt:
 - Für alle Knoten u im linken Unterbaum von v gilt: $u < v$
 - Für alle Knoten u im rechten Unterbaum von v gilt: $u > v$

28