Script **generated by TTT**

Title: Esparza: Diskrete Strukturen (19.11.2013)

Date: Tue Nov 19 13:45:11 CET 2013

Duration: 88:49 min

Pages: 30

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Syntax der Prädikatenlogik
  - Das Vokabular setzt sich aus folgenden Zeichenklassen zusammen:
    - (Individuen)variablen: $x, y, z, \ldots$
    - Konstanten: $a, b, c, \ldots$
    - Unäre Prädikatsymbole: $P^1, Q^1, R^1, \ldots$
      Binäre Prädikatsymbole: $P^2, Q^2, R^2, \ldots$ usw.
    - Unäre Funktionssymbole: $f^1, g^1, h^1, \ldots$
      Binäre symbole: $f^2, g^2, h^2, \ldots$ usw.
    - Gleichheitssymbol: $=$
    - Logische Operatoren: $\neg, \ \wedge, \ \vee, \rightarrow$
    - Quantoren: $\forall$ („für alle“), $\exists$ („es gibt“)
    - Hilfssymbole: (,)

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Syntax der Prädikatenlogik
  - Formationsregeln

Regel 0: jede Variable und jede Konstante ist ein Term.

Regel 1: sind $t_1, \ldots, t_n$ Terme, dann ist $f^n(t_1, \ldots, t_n)$ ebenfalls ein Term.

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Aufgabe: Formeln oder Nicht-Formeln?

$P^1(x)$	x
$\forall x\ (f(x) \wedge P^1(x))$	$\forall x\ \exists y\ (x = y \vee \neg Q^1(y))$
$x = P^1(x)$	$\forall x\ P^1(x) = Q^1(f(g(x)))$
$\exists x\ \forall x\ (P^1(x) \wedge Q^2(x, b))$	$\exists x\ f(x)$
$(\forall x\ P^1(a) \wedge\ Q^1(x))$	$\forall P^1\ \exists x\ P^1(x)$
$P^1(x, y)$	$((P^1(x) \wedge\ Q^2(a, y)) \vee f(x) = y)$

- Syntax der Prädikatenlogik
  - Die Stelligkeit der Prädikat- und Funktionssymbolen lassen wir oft weg. Wir nehmen an, dass alle Vorkommisse eines Symbols dieselbe Stelligkeit haben.

    Beispiel: $\forall x\, \forall y\, (P(x,y) \rightarrow P(y,x))$

    Achtung: $\forall x\, (P(x) \wedge P(x,x))$ ist keine Formel!
  - Manchmal lassen wir Klammern weg, oder fügen welche hinzu. Dabei nehmen wir an, dass Quantoren stärker als Konjunktion, Disjunktion und Implikation binden:

    $\forall x\, P(x) \wedge Q(y)$ ist die Formel $(\forall x\, P(x)) \wedge Q(y)$ und nicht $\forall x\, (P(x) \wedge Q(y))$

- Semantik der Prädikatenlogik: Intuition
  - Eine Welt, die zu $F = \forall x\, P(a,x)$ passt, und in der F falsch ist (diesmal mit Sicherheit).
    - Die Individuen der Welt sind die natürlichen Zahlen.
    - a ist die 7
    - $P(y,x)$ bedeutet „y ist ein vielfaches von x“

- Formale Semantik der Prädikatenlogik
  - Das Fachwort für „Welt“ ist Struktur.
  - Eine Struktur S besteht aus zwei Teilen:
    - Eine nichtleere Menge U_S, genannt Universum (Wertebereich, Individuenbereich, Grundmenge, Domäne, …)

      „Die Menge aller Individuen der Welt“.
    - Eine Interpretation I_S.

- Formale Semantik der Prädikatenlogik
  - Die Interpretation I_S ist eine partielle Funktion, die
    - eine Variable x einem Element x_S von U,
    - eine Konstante a einem Element a_S von U,
    - ein k-stelliges Prädikatsymbol P einer Menge $P_S \subseteq U^k$, und
    - ein k-stelliges Funktionsymbol f eine Funktion $f_S\colon U^k \rightarrow U$

    zuordnet.

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Formale Semantik der Prädikatenlogik
  - Intuition:
    - x_S ist das Individuum, auf dem die Variable x „zeigt“
    - a_S ist das Individuum mit dem Namen „a“
    - P_S ist die Menge der Tupel von Individuen mit der Eigenschaft P
    - f_S ist die Funktion mit dem Namen f
  - Beachte: P_S kann extensional beschrieben werden, wir zählen die Tupel von P_S auf. Ähnlich für f_S.
  - Das Universum kann jedoch unendlich sein!

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Formale Semantik der Prädikatenlogik
  - Eine Struktur $S = (U_S, I_S)$ passt zu einer Formel F falls die Interpretation I_S für alle in F vorkommenden Prädikatsymbole, Konstanten, und freien Variablen definiert ist.
    - Beispiel: S passt zu $\forall x\, P(x, a, y)$ wenn a_S, y_S, und P_S definiert sind.
  - Die Semantik einer Formel F ist eine Funktion $[F]$, die jede Struktur S, die zu F passt, („jeder Welt“) einem Wahrheitswert $[F](S)$ zuordnet.

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Formale Semantik der Prädikatenlogik
  - Beispiel: einige passende Strukturen für die Formel

$$\forall x\, (P(x) \to \exists y\, Q(x, y))$$

  - Struktur $S_1 = (U_1, I_1)$
    - $U_1 = \mathbb{N}_0$
    - $P_1 = \{ n \in \mathbb{N}_0 \mid n \text{ ist gerade} \}$
    - $Q_1 = \{ (n, m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \mid n + m = 5 \}$
  - Struktur $S_2 = (U_2, I_2)$
    - $U_2 = \{ 0, 1, 2 \}$
    - $P_2 = \{ 0 \}$
    - $Q_2 = \{ (n, m) \in \{0, 1, 2\} \times \{0, 1, 2\} \mid n \leq m \}$

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Formale Semantik der Prädikatenlogik
  - Beispiel: einige passende Strukturen für die Formel

$$\forall x\, (P(x) \to \exists y\, Q(x, y))$$

  - Struktur $S_5 = (U_5, I_5)$
    - $U_5 = \mathbb{N}_0$
    - $P_5 = \emptyset$
    - $Q_5 = \emptyset$
  - Struktur $S_6 = (U_6, I_6)$
    - U_6 = die Menge der Fußballer, die am nächsten Sonntag mindestens ein Tor in der 1. Bundesliga schießen werden
    - $P_6 = \{ f \in U_6 \mid f$ spielt für Borussia Dortmund $\}$
    - $Q_6 = \{(f_1, f_2) \in U_6 \times U_6 \mid f_1$ und f_2 schießen am nächsten Sonntag genau soviele Tore$\}$

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Formale Semantik der Prädikatenlogik
  - Die Funktion $[F]$ ist folgendermaßen definiert in Abhängigkeit von F:

(1) Semantik der Formeln $P(u_1, \dots, u_n)$:

Sei $F = P(u_1, \dots, u_n)$.

$$[F](S) = \begin{cases} 1 & \text{falls } (u_{1S}, \dots, u_{nS}) \in P_S \\ 0 & \text{falls } (u_{1S}, \dots, u_{nS}) \notin P_S \end{cases}$$

(2) Semantik der Formeln $t = u$

$$[t = u](S) = \begin{cases} 1 & \text{falls } t_S = u_S \\ 0 & \text{falls } t_S \neq u_S \end{cases}$$

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Formale Semantik der Prädikatenlogik
  - Die Funktion $[F]$ ist folgendermaßen definiert in Abhängigkeit von F:

(3) Semantik der Booleschen Operatoren: wie für die Aussagenlogik. Z.B. sei $F = (G \rightarrow H)$ für Formeln F und G:

$$[F](S) = \begin{cases} 1 & \text{falls } [G](S) = 0 \text{ oder } [H](S) = 1 \\ 0 & \text{falls } [G](S) = 1 \text{ und } [H](S) = 0 \end{cases}$$

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Formale Semantik der Prädikatenlogik
  - Die Funktion $[F]$ ist folgendermaßen definiert in Abhängigkeit von F:

(4.1) Semantik des Existenzquantors.

$F = \exists x\, G$ für eine Formel G.

$$[F](S) = \begin{cases} 1 & \text{falls es ein } d \in U_s \text{ gibt mit: } [G](S_{x:=d}) = 1 \\ 0 & \text{falls für alle } d \in U_s \text{ gilt: } [G](S_{x:=d}) = 0 \end{cases}$$

Sei $F = \exists x\, P(x)$, $U_S = \{a, b\}$, $P_S = \{a\}$

Wir haben $[F](S) = 1$, denn $[P(x)](S_{x:=a}) = 1$

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Formale Semantik der Prädikatenlogik
  - Die Funktion $[F]$ ist folgendermaßen definiert in Abhängigkeit von F:

(4.1) Semantik des Existenzquantors.

$F = \exists x\, G$ für eine Formel G.

$$[F](S) = \begin{cases} 1 & \text{falls es ein } d \in U_s \text{ gibt mit: } [G](S_{x:=d}) = 1 \\ 0 & \text{falls für alle } d \in U_s \text{ gilt: } [G](S_{x:=d}) = 0 \end{cases}$$

Sei $F = \exists x\, P(x)$, $U_S = \{a, b\}$, $P_S = \{a\}$

Wir haben $[F](S) = 1$, denn $[P(x)](S_{x:=a}) = 1$

30

Vorlesung Diskrete Strukturen WS 13/14
Prof. Dr. J. Esparza – Institut für Informatik, TU München

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Geschachtelte Quantoren
  - Formel F: $\forall x\, \exists y\, P(x,y)$
    Struktur S: $U_S = \mathbb{N}_0$
    $P_S = \{(n,m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \mid n < m\}$
    ("$P(x,y)$ bedeutet $x < y$")
  - Frage: ist F wahr in S?

32

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Geschachtelte Quantoren
  - Formel F: $\forall x\, \exists y\, P(x,y)$
    Struktur S: $U_S = \mathbb{N}_0$
    $P_S = \{(n,m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \mid n < m\}$
    ("$P(x,y)$ bedeutet $x < y$")
  - Frage: ist F wahr in S?
  - Wir zeigen $[\forall x\, \exists y\, P(x,y)](S) = 1$ nach der Definition:
    - Es reicht zu zeigen: $[\exists y\, P(x,y)](S_{x:=d}) = 1$ für $d = 0,1,2,\ldots$
    - Wir müssen also ein e finden mit $[P(x,y)](S_{x:=d,y:=e}) = 1$.
    - D.h., wir müssen ein e finden mit $d < e$.
    - Wir nehmen z.B. $e = d + 1$. Fertig.

34

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Geschachtelte Quantoren
  - Formel G: $\exists y\, \forall x\, P(x,y)$
    Struktur S: $U_S = \mathbb{N}_0$
    $P_S = \{(n,m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \mid n < m\}$
    ("$P(x,y)$ bedeutet $x < y$")
  - Frage: ist G wahr in S?

35

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Aufgabe.

  Sei die Interpretation von $R(x,y)$ "x verlässt sich auf y." Welche Formel gehört zu welchem Satz?

  1. $\forall x \exists y\, R(x,y)$ a. "Es gibt einen, der sich auf alle verlässt."
  2. $\exists y \forall x\, R(x,y)$ b. "Jeder kann sich auf jemanden verlassen."
  3. $\exists x \forall y\, R(x,y)$ c. "Auf jeden verlässt sich irgend jemand."
  4. $\forall y \exists x\, R(x,y)$ d. "Es gibt einen, auf den sich alle verlassen."
  5. $\forall x \forall y\, R(x,y)$ e. "Jeder verlässt sich auf alle"

37

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Tautologie, Widerspruch, Erfüllbarkeit, …
  - Eine Formel F ist allgemeingültig wenn für jede Struktur S, die zu F passt, gilt: $[F](S) = 1$.
  - Eine Formel F ist ein Widerspruch wenn für jede Struktur S, die zu F passt, gilt: $[F](S) = 0$.
  - Eine Formel F ist erfüllbar wenn es eine Struktur S gibt, die zu F passt, und $[F](S) = 1$ erfüllt.
  - Zwei Formeln F und G sind logisch äquivalent (symbolisch: $F \equiv G$) genau dann, wenn für jede Struktur S, die zu F und zu G passt, gilt: $[F](S) = [G](S)$
  - F folgt aus G (symbolisch: $F \vDash G$) genau dann, wenn $F \to G$ gültig ist.

Modellierung mit Prädikatenlogik

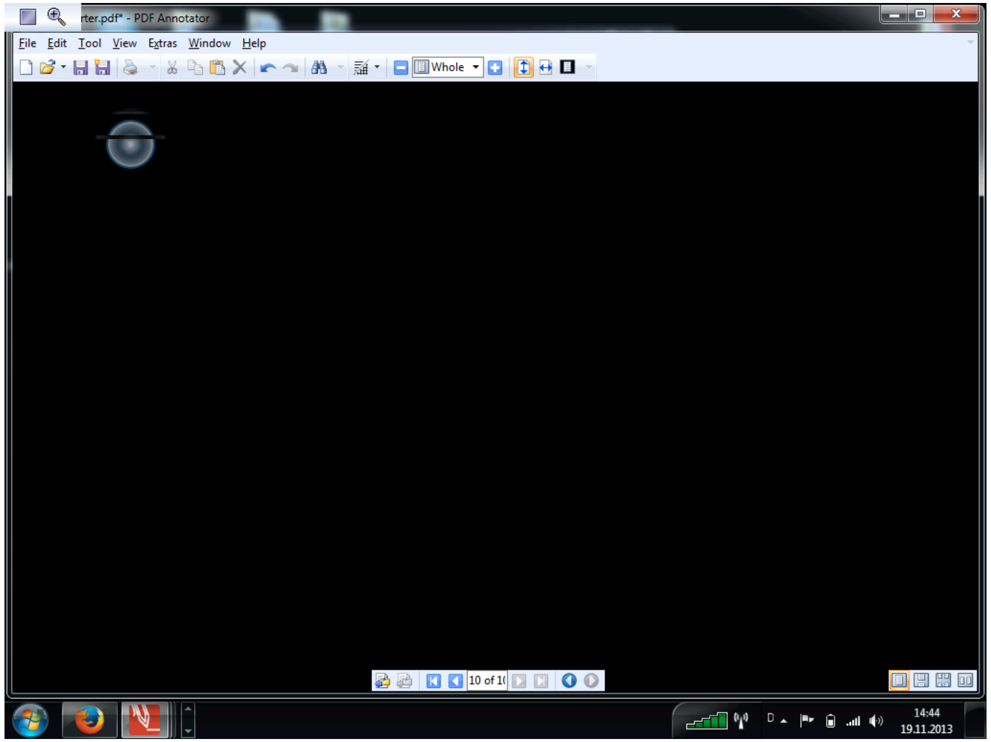
- Es ist kein Fehl und Laster, es gibt dafür ein Pflaster

$$\forall x\ \Big(\big(\neg Fehl(x) \wedge \neg Laster(x)\big) \to \exists y\ Pflaster(y, x)\Big)$$

Modellierung mit Prädikatenlogik

- Aller guten Dinge sind drei

$$\forall x \forall y \left(\begin{array}{c} \big(\neg(x = y) \wedge Gut(x) \wedge Gut(y)\big) \\ \to \\ \exists z\ \big(\neg(z = x) \wedge \neg(z = y) \wedge Gut(z)\big) \end{array}\right)$$



Modellierung mit Prädikatenlogik

- Die Folge $f_1, f_2, \ldots$ von reellen Zahlen konvergiert nach a.

$$\forall \epsilon > 0 \colon \exists n_0 \in \mathbb{N} \colon \forall n \geq n_0 \colon |f(n) - f(n_0)| < \epsilon$$

$$\forall \epsilon \left(Gr(\epsilon, 0) \to \exists n_0 \left(Nat(n_0) \wedge \forall n \left((Nat(n) \wedge Gr(n, n_0)) \to Gr\left(abs\left(diff\left(f(n), f(n_0)\right)\right), \epsilon\right) \right) \right) \right)$$

Modellierung mit Prädikatenlogik

- Die Folge $f_1, f_2, \ldots$ von reellen Zahlen konvergiert nach a.

New
Size
Current page size
Style
5mm
7mm
Orientation
Pages
1
OK
Cancel

$$\boxed{\forall \epsilon > 0 \colon \exists n_0 \in \mathbb{N} \colon \forall n \geq n_0 \colon |f(n) - f(n_0)| < \epsilon}$$

$$\forall \epsilon \left(Gr(\epsilon, 0) \to \exists n_0 \left(Nat(n_0) \wedge \forall n \left((Nat(n) \wedge Gr(n, n_0)) \to Gr\left(abs\left(diff\left(f(n), f(n_0)\right)\right), \epsilon\right) \right) \right) \right)$$

1, 0,1, 0.01, 0.001, 0.000…

1, 1,9, 1,99, 1,999, 1,9999, .. 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2,

Modellierung mit Prädikatenlogik

- Die Folge $f_1, f_2, \ldots$ von reellen Zahlen konvergiert nach a.

$$\boxed{\forall \epsilon > 0 \colon \exists n_0 \in \mathbb{N} \colon \forall n \geq n_0 \colon |f(n) - f(n_0)| < \epsilon}$$

$$\forall \epsilon \left(Gr(\epsilon, 0) \to \exists n_0 \left(Nat(n_0) \wedge \forall n \left((Nat(n) \wedge Gr(n, n_0)) \to Gr\left(abs\left(diff\left(f(n), f(n_0)\right)\right), \epsilon\right) \right) \right) \right)$$

1, 0,1, 0.01, 0.001, 0.0001, 0.00001, ——

1, 1,9, 1,99, 1,999, 1,9999, .. 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2,

Modellierung mit Prädikatenlogik

- Die Folge $f_1, f_2, \ldots$ von reellen Zahlen konvergiert nach a.

$$\forall \epsilon > 0 \colon \exists n_0 \in \mathbb{N} \colon \forall n \geq n_0 \colon |f(n) - f(n_0)| < \epsilon$$

$$\forall \epsilon \left(\begin{array}{c} Gr(\epsilon, 0) \rightarrow \\ \exists n_0 \left(\begin{array}{c} Nat(n_0) \land \\ \forall n \left(\begin{array}{c} (Nat(n) \land Gr(n, n_0)) \rightarrow \\ Gr\Big(abs\big(diff(f(n), f(n_0))\big), \epsilon\Big) \end{array} \right) \end{array} \right) \end{array} \right)$$

1, 0,1, 0.01, 0.001, 0.0001, 0.00001, ...

1, 1,9, 1,99, 1.999, 1.9999, ... 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2,

$\forall x > 3 \colon F$

$\exists x > 3 \colon F$

$\forall x \, (x > 3 \rightarrow F$

$\exists x \, (x > 3 \land F)$

$>(x, 3)$

$x > 3$.