

Title: Esparza: Diskrete Strukturen (24.10.2013)

Date: Thu Oct 24 10:20:14 CEST 2013

Duration: 85:37 min

Pages: 22

Kapitel II – Grundlagen; Relationen

• Komposition von Funktionen:

Die Operation ("o") setzt aus zwei Funktionen $g: A \rightarrow B$ und $f: B \rightarrow C$ eine neue Funktion zusammen, indem f auf das Resultat von g angewendet wird.

- Wir schreiben: $(f \circ g): A \rightarrow C$ definiert durch $(f \circ g)(a) = f(g(a))$.
- Da $g(a) \in B$, ist $f(g(a))$ definiert und Element von C .
- Der Operator \circ ist nicht kommutativ; im Allgemeinen gilt: $f \circ g \neq g \circ f$.

40

Kapitel II – Grundlagen; Relationen

• Eine Funktion $f: A \rightarrow B$ heißt

– **injektiv**, wenn alle Elemente aus A unterschiedliche Bilder haben, wenn also für alle $b \in B$ gilt:

$$|f^{-1}(b)| \leq 1.$$

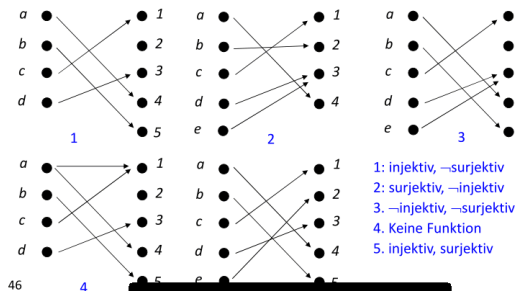
– **surjektiv**, wenn jedes Element aus B ein Bild von mindestens einem Element aus A ist, wenn also für alle $b \in B$ gilt:

$$|f^{-1}(b)| \geq 1.$$

45

Kapitel II – Grundlagen; Relationen

• Grafische Darst. der Injektivität/Surjektivität.



46

50

Kapitel II – Grundlagen; Relationen

• Bijektivität

– Eine Funktion $f: A \rightarrow B$ ist **bijektiv**, oder reversibel, oder invertierbar, genau dann wenn sie **injektiv und surjektiv** ist, wenn also für alle $b \in B$ gilt:

$$|f^{-1}(b)| = 1.$$

– Eine Bijektion $f: A \rightarrow B$ hat eine eindeutige **inverse Funktion** $f^{-1}: B \rightarrow A$ definiert durch $(f^{-1} \circ f) = Id_A$, wobei Id_A die Identitätsfunktion bezeichnet.

47

Kapitel II – Grundlagen; Relationen

• Einige spezielle Funktionen

– In der diskreten Mathematik haben wir es häufig mit den folgenden Funktionen über den reellen Zahlen zu tun.

– Die floor Funktion (“untere Gaußklammer”) $\lfloor \cdot \rfloor: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$, wobei $\lfloor x \rfloor$ (“floor of x ”) die **größte ganze Zahl** $\leq x$ bezeichnet, also

$$\lfloor x \rfloor = \max(\{i \in \mathbb{Z} \mid i \leq x\})$$

– Die ceiling Funktion (“obere Gaußklammer”) $\lceil \cdot \rceil: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$, wobei $\lceil x \rceil$ (“ceiling of x ”) die **kleinste ganze Zahl** $\geq x$ bezeichnet, also

$$\lceil x \rceil = \min(\{i \in \mathbb{Z} \mid i \geq x\})$$

48

Kapitel II – Grundlagen; Relationen

• Einige spezielle Funktionen

– Reelle Zahlen “fall to their floor” oder “rise to their ceiling”.

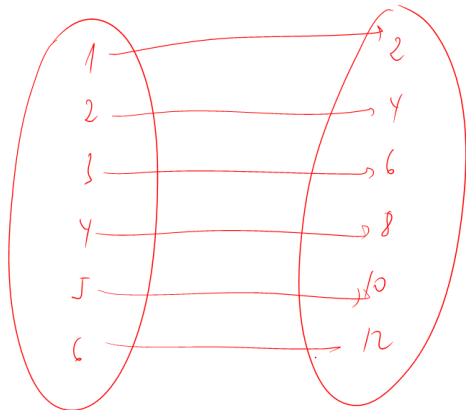
– Wenn $x \notin \mathbb{Z}$:

$$\lfloor -x \rfloor \neq -\lfloor x \rfloor \text{ und } \lceil -x \rceil \neq -\lceil x \rceil$$

– Wenn $x \in \mathbb{Z}$:

$$\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil = -x = \lceil -x \rceil \neq -\lfloor x \rfloor$$

49



Kapitel II – Grundlagen; Relationen

- **Definition:**
Zwei (möglicherweise unendliche) Mengen A und B , haben die **gleiche Kardinalität** ($|A| = |B|$) genau dann wenn eine **Bijektion** (bijektive Funktion) von A nach B existiert. Man sagt auch, dass A die **gleiche Mächtigkeit** wie B hat.
- **Bemerkung:**
Sind A und B endlich, dann existiert eine solche Funktion genau dann wenn A und B **dieselbe Anzahl von Elementen** haben.

51

Kapitel II – Grundlagen; Relationen

- **Abzählbarkeit vs. Überabzählbarkeit**
 - Eine beliebige Menge S ist **abzählbar**, wenn S endlich ist oder $|S| = |\mathbb{N}|$.
Andernfalls ist S **überabzählbar**.
 - Intuitiv: eine Menge ist abzählbar, wenn ihre Elemente "aufgelistet" werden können. Dagegen kann keine unendliche Liste alle Elemente einer überabzählbaren Menge enthalten.

53

Kapitel II – Grundlagen; Relationen

- Abzählbarkeit vs. Überabzählbarkeit
 - Eine beliebige Menge S ist **abzählbar**, wenn S endlich ist oder $|S| = |\mathbb{N}|$.
Andernfalls ist S **überabzählbar**.
 - Intuitiv: eine Menge ist abzählbar, wenn ihre Elemente "aufgelistet" werden können. Dagegen kann keine unendliche Liste alle Elemente einer überabzählbaren Menge enthalten.

53

Vorlesung Diskrete Strukturen WS 13/14
Prof. Dr. J. Esparza – Institut für Informatik, TU München

Kapitel II – Grundlagen; Relationen

- Beispiele von abzählbaren Mengen:

Theorem:

Die Menge \mathbb{Z} ist abzählbar.

Beweis:

Definiere $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ durch

$$f(i) = \begin{cases} 2i & \text{falls } i \geq 0 \\ -2i - 1 & \text{falls } i < 0 \end{cases}$$

Da f bijektiv ist, ist \mathbb{Z} abzählbar.

54

Vorlesung Diskrete Strukturen WS 13/14
Prof. Dr. J. Esparza – Institut für Informatik, TU München

Kapitel II – Grundlagen; Relationen

- Beispiele von abzählbaren Mengen:

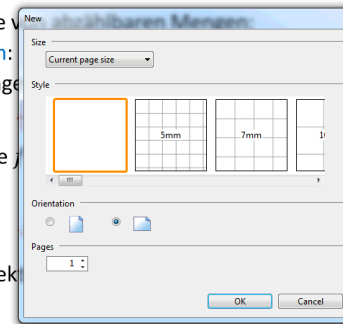
Theorem:

Die Menge \mathbb{Z} ist abzählbar.

Beweis:

Definiere $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ durch

Da f bijektiv ist, ist \mathbb{Z} abzählbar.



54

Vorlesung Diskrete Strukturen WS 13/14
Prof. Dr. J. Esparza – Institut für Informatik, TU München

Kapitel II – Grundlagen; Relationen

- Beispiele von abzählbaren Mengen:

Theorem: Sei A eine endliche Menge. Die Menge $A^* = \bigcup_{i=1}^{\infty} A^i$ ist abzählbar.

Beweisidee:

A^* ist die Menge aller endlichen Tupeln von Elementen von A . Um sie aufzulisten, liste zuerst die Elementen von A auf, dann die von A^2, A^3 etc.

55

Kapitel II – Grundlagen; Relationen

- Beispiel überabzählbare Mengen:

– Das Intervall $[0,1] := \{r \in \mathbb{R} \mid 0 \leq r \leq 1\}$ ist überabzählbar.

– Beweis durch **Diagonalisierung**.

– Allgemeiner gilt für jede beliebige Menge M : die Potenzmenge $P(M)$ von M ist mächtiger als M .



Georg Cantor
1845-1918

56



15

Kapitel II – Grundlagen; Relationen

- Beispiel überabzählbare Mengen:

– Das Intervall $[0,1] := \{r \in \mathbb{R} \mid 0 \leq r \leq 1\}$ ist überabzählbar.

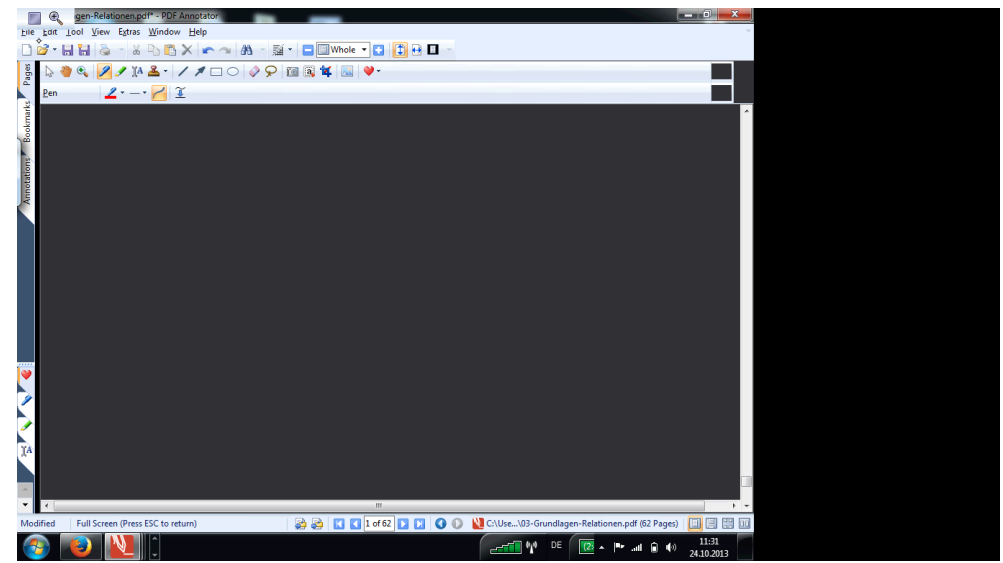
– Beweis durch **Diagonalisierung**.

– Allgemeiner gilt für jede beliebige Menge M : die Potenzmenge $P(M)$ von M ist mächtiger als M .



Georg Cantor
1845-1918

56



Kapitel II – Grundlagen; Logik

- **Logik** ist die Wissenschaft des **Schließens**.
Sie untersucht welche **Inferenzen** korrekt sind.
- Unter **Inferenz** verstehen wir (informell) eine Aussage der Form: **wenn A wahr ist, dann ist auch B wahr**.
 - Umgangssprachlich sagen wir auch:
 - Wenn A gilt, dann gilt B
 - Wenn A dann B
 - A impliziert B
- A ist die **Annahme** (**Prämisse**, **Antezedens**, **Hypothese**) und B die **Konklusion** (**Konsequenz**).

3

Vorlesung Diskrete Strukturen WS 13/14
Prof. Dr. J. Esparza – Institut für Informatik, TU München