Script **generated by TTT**

Title: Mayr: 2012 ds (15.01.2013)

Date: Tue Jan 15 13:47:07 CET 2013

Duration: 93:29 min

Pages: 45

Satz 222

Einige wichtige Erzeugendenfunktionen:

1. $$\sum_{n\geq 0} z^n = \frac{1}{1-z}$$

2. $$\sum_{n\geq 0} (-1)^n \cdot z^n = \frac{1}{1+z}$$

3. $$\sum_{n\geq 0} z^{2n} = \frac{1}{1-z^2}$$

Beispiel 221

Geometrische Reihe:

$$A(z) = \sum_{n\geq 0} z^n$$

Es gilt $A(z)\cdot(1-z) = 1$, da

$$\begin{aligned} A(z)\cdot(1-z) &= A(z) - z\cdot A(z) \\ &= (1+z+z^2 \ldots) - (z+z^2+z^3+\ldots) = 1 \end{aligned}$$

Also:

$$A(z) = \frac{1}{1-z}$$

Satz 222

Einige wichtige Erzeugendenfunktionen:

1. $$\sum_{n\geq 0} z^n = \frac{1}{1-z}$$

2. $$\sum_{n\geq 0} (-1)^n \cdot z^n = \frac{1}{1+z}$$

3. $$\sum_{n\geq 0} z^{2n} = \frac{1}{1-z^2}$$

4.

$$\sum_{n\ge 0}\binom{a}{n} z^n = (1+z)^a, \quad a \in \mathbb{C}$$

7.

$$\sum_{n\ge 0}\frac{z^n}{n!} = e^z$$

8.

$$\sum_{n\ge 1}\frac{(-1)^{n+1}z^n}{n} = \ln(1+z)$$

4.

$$\sum_{n\ge 0}\binom{a}{n} z^n = (1+z)^a, \quad a \in \mathbb{C}$$

5.

$$\sum_{n\ge 0}\binom{c+n-1}{n} z^n = \frac{1}{(1-z)^c} = (1-z)^{-c}$$

6.

$$\sum_{n\ge 0}\binom{m+n}{n} z^n = \frac{1}{(1-z)^{m+1}}$$

7.

$$\sum_{n\ge 0}\frac{z^n}{n!} = e^z$$

8.

$$\sum_{n\ge 1}\frac{(-1)^{n+1}z^n}{n} = \ln(1+z)$$

Beweis:

1. s. o.
2. Setze in (1) $z \mapsto -z$.
3. Setze in (1): $z \mapsto z^2$.
4. Der Fall $a \in \mathbb{N}_0$ wird durch den Binomialsatz gezeigt, für allgemeine a verweisen wir auf die *Analysis*.
5. $$\sum_{n\geq 0} \binom{c+n-1}{n} z^n = \sum_{n\geq 0} \binom{-c}{n} (-1)^n z^n = \sum_{n\geq 0} \binom{-c}{n} (-z)^n \stackrel{(4)}{=} (1-z)^{-c}$$
6. Setze in (5) $c := m+1$.

$\square$

Beispiel 223

Sei

$$A(z) = \sum_{n\geq 0} a_n \cdot z^n, m \in \mathbb{N}_0 .$$

Dann ist

$$z^m \cdot A(z) = \sum_{n\geq 0} a_n \cdot z^{n+m} = \sum_{n\geq m} a_{n-m} \cdot z^n .$$

Deskewing Image...

Beispiel (Forts.)

Damit gilt

$$\frac{z^m}{(1-z)^{m+1}} \stackrel{\text{Folie } 376(6)}{=} z^m \cdot \sum_{n\geq 0} \binom{m+n}{n} \cdot z^n$$
$$= \sum_{n\geq 0} \binom{m+n}{n} z^{m+n} = \sum_{n\geq m} \binom{n}{n-m} z^n$$
$$\stackrel{(*)}{=} \sum_{n\geq 0} \binom{n}{n-m} \cdot z^n .$$

$(*)$ *Das Gleichheitszeichen gilt, da für* $n < m$

$$\binom{n}{n-m} = 0$$

ist.

Beispiel (Forts.)

Damit gilt

$$\frac{z^m}{(1-z)^{m+1}} \stackrel{\text{Folie } 376(6)}{=} z^m \cdot \sum_{n\geq 0} \binom{m+n}{n} \cdot z^n$$
$$= \sum_{n\geq 0} \binom{m+n}{n} z^{m+n} = \sum_{n\geq m} \binom{n}{n-m} z^n$$
$$\stackrel{(*)}{=} \sum_{n\geq 0} \binom{n}{n-m} \cdot z^n .$$

$(*)$ *Das Gleichheitszeichen gilt, da für* $n < m$

$$\binom{n}{n-m} = 0$$

ist.

4.11 Auflösung von Rekursionsgleichungen

Beispiel 224

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 2 \\
a_n &= 2 \cdot a_{n-1} + 2^n \qquad \text{für alle } n \geq 1
\end{aligned}
$$

lineare inhomogene Rekursionsgleichung 1. Ordnung

$$
\begin{aligned}
a_n &= 2 \cdot a_{n-1} + 2^n \\
a_{n-1} &= 2 \cdot a_{n-2} + 2^{n-1} \quad | \cdot (-2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_n - 2 \cdot a_{n-1} &= 2 \cdot a_{n-1} - 4 \cdot a_{n-2} + 2^n - 2 \cdot 2^{n-1} \\
\Rightarrow 0 &= a_n - 4 \cdot a_{n-1} + 4 \cdot a_{n-2}
\end{aligned}
$$

lineare homogene Rekursionsgleichung 2. Ordnung

4.11 Auflösung von Rekursionsgleichungen

Beispiel 224

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 2 \\
a_n &= 2 \cdot a_{n-1} + 2^n \qquad \text{für alle } n \geq 1
\end{aligned}
$$

lineare inhomogene Rekursionsgleichung 1. Ordnung

$$
\begin{aligned}
a_n &= 2 \cdot a_{n-1} + 2^n \\
a_{n-1} &= 2 \cdot a_{n-2} + 2^{n-1} \quad | \cdot (-2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_n - 2 \cdot a_{n-1} &= 2 \cdot a_{n-1} - 4 \cdot a_{n-2} + 2^n - 2 \cdot 2^{n-1} \\
\Rightarrow 0 &= a_n - 4 \cdot a_{n-1} + 4 \cdot a_{n-2}
\end{aligned}
$$

lineare homogene Rekursionsgleichung 2. Ordnung

Beispiel (Forts.)

Zu dieser linearen Rekursionsgleichung

$$a_n - 4 \cdot a_{n-1} + 4 \cdot a_{n-2} = 0$$

gehört das folgende charakteristische Polynom:

$$(x-2)^2 = x^2 - 4 \cdot x + 4 = 0$$

Später wird gezeigt, dass die a_n hier von der Form

$$a_n = (c_1 \cdot n + c_2) \cdot 2^n \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{C}$$

sind. Aus den Anfangsbedingungen ($a_0 = 2, a_1 = 6$) ergibt sich $c_1 = 1$ und $c_2 = 2$. Damit gilt

$$a_n = (n+2) \cdot 2^n \qquad \forall n \geq 0$$

Beispiel (Forts.)

Man zeigt auch allgemein, dass

$$
\begin{aligned}
a_n &= (c_1 \cdot n + c_2) \cdot 2^n \quad \textit{folgende Bedingung erfüllt:} \\
a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} &= 0 \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{C}).
\end{aligned}
$$

Beispiel 225

Sei $(a_0, a_1, a_2) = (0, 1, 2)$ und

$$a_n = a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-3} \qquad \forall n \geq 3$$

(also $(a_i)_{i\geq 0} = (0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, \ldots)$). Das zugehörige charakteristische Polynom ist

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 + x - 1 = 0 &= (x-1)(x^2+1) \\ &= (x-1)(x-i)(x+i). \end{aligned}$$

Setze nun $a_n = c_1 \cdot 1^n + c_2 \cdot i^n + c_3 \cdot (-i)^n$. Durch Einsetzen der Anfangsbedingungen erhält man dann $c_1 = 1$ und $c_2 = c_3 = -\frac{1}{2}$, also

$$a_n = 1 - \frac{1}{2}(i^n + (-i)^n).$$

Satz 226

Sei $(q_1, q_2, \ldots, q_d)$ eine gegebene Folge, $q_i \in \mathbb{C}, d \geq 1, q_d \neq 0$. Sei weiter

$$q(z) := 1 + q_1 z + q_2 z^2 + \ldots + q_d z^d$$

Das reflektierte Polynom dazu ist

$$q^R(z) := z^{\deg(q)} \cdot q\left(\frac{1}{z}\right) = z^d + q_1 z^{d-1} + q_2 z^{d-2} + \ldots + q_d$$

(Bemerkung: $q^R(z)$ ist das charakteristische Polynom). Seien $(\alpha_i)_{1\leq i\leq k}$ die verschiedenen Nullstellen von q^R, sei d_i die Vielfachheit von α_i. Damit ist

$$\sum_{i=1}^{k} d_i = d.$$

Diskrete Strukturen
©Ernst W. Mayr

Satz 226 (Forts.)

Gelten diese Bedingungen, so sind für eine Folge $(f_n)_{n\geq 0}$, mit

$$F(z) := \sum_{n\geq 0} f_n z^n$$

der zugehörigen Erzeugendenfunktion, die folgenden Aussagen äquivalent:

1. **Lineare Rekursion:** *(d ist die Ordnung der Rekursion)*

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0)\left[f_{n+d} + q_1 \cdot f_{n+d-1} + q_2 \cdot f_{n+d-2} + \ldots + q_d \cdot f_n = 0\right]$$

2. **Erzeugende Funktion:**

$$F(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

für ein Polynom $p(z)$ vom Grad $< d$.

Diskrete Strukturen
©Ernst W. Mayr

Satz 226 (Forts.)

Gelten diese Bedingungen, so sind für eine Folge $(f_n)_{n\geq 0}$, mit

$$F(z) := \sum_{n\geq 0} f_n z^n$$

der zugehörigen Erzeugendenfunktion, die folgenden Aussagen äquivalent:

1. **Lineare Rekursion:** *(d ist die Ordnung der Rekursion)*

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0)\left[f_{n+d} + q_1 \cdot f_{n+d-1} + q_2 \cdot f_{n+d-2} + \ldots + q_d \cdot f_n = 0\right]$$

2. **Erzeugende Funktion:**

$$F(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

für ein Polynom $p(z)$ vom Grad $< d$.

Satz 226 (Forts.)

3. **Partialbruchzerlegung:** *Es gibt Polynome g_i, $\deg(g_i) < d_i$ für $i = 1, \ldots, k$, so dass*

$$F(z) = \sum_{i=1}^{k} \frac{g_i(z)}{(1 - \alpha_i z)^{d_i}}$$

4. **Explizite Darstellung:** *Es gibt Polynome p_i, $\deg(p_i) < d_i$, so dass*

$$(\forall n \geq 0)\left[f_n = \sum_{i=1}^{k} p_i(n) \cdot \alpha_i{}^n\right]$$

Satz 226 (Forts.)

3. **Partialbruchzerlegung:** *Es gibt Polynome g_i, $\deg(g_i) < d_i$ für $i = 1, \ldots, k$, so dass*

$$F(z) = \sum_{i=1}^{k} \frac{g_i(z)}{(1 - \alpha_i z)^{d_i}}$$

4. **Explizite Darstellung:** *Es gibt Polynome p_i, $\deg(p_i) < d_i$, so dass*

$$(\forall n \geq 0)\left[f_n = \sum_{i=1}^{k} p_i(n) \cdot \alpha_i{}^n\right]$$

Beweis:

Betrachte die komplexen Vektorräume

$$V_k = \{(f_n)_{n\geq 0} : (f_n)_{n\geq 0} \text{ erfüllt Eigenschaft } k\}$$

mit $k \in \{1, 2, 3, 4\}$. Es gilt:

$$\dim(V_1) = d$$

$\dim(V_2) = d$ (p hat d frei wählbare Koeffizienten)

$\dim(V_3) = \sum_{i=1}^{k} d_i = d$ (g_i hat d_i frei wählbare Koeffizienten)

$\dim(V_4) = \sum_{i=1}^{k} d_i = d$ (p_i hat d_i frei wählbare Koeffizienten)

Um zu zeigen $V_i = V_j$, genügt es daher, $V_i \subseteq V_j$ zu zeigen.

Satz 226 (Forts.)

Gelten diese Bedingungen, so sind für eine Folge $(f_n)_{n\geq 0}$, mit

$$F(z) := \sum_{n\geq 0} f_n z^n$$

der zugehörigen Erzeugendenfunktion, die folgenden Aussagen äquivalent:

1. **Lineare Rekursion:** *(d ist die Ordnung der Rekursion)*

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0)\left[f_{n+d} + q_1 \cdot f_{n+d-1} + q_2 \cdot f_{n+d-2} + \ldots + q_d \cdot f_n = 0\right]$$

2. **Erzeugende Funktion:**

$$F(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

für ein Polynom $p(z)$ vom Grad $< d$.

Beweis:

Betrachte die komplexen Vektorräume

$$V_k = \{(f_n)_{n\geq 0} : (f_n)_{n\geq 0} \text{ erfüllt Eigenschaft } k\}$$

mit $k \in \{1, 2, 3, 4\}$. Es gilt:

$$\dim(V_1) = d$$
$$\dim(V_2) = d \text{ (p hat d frei wählbare Koeffizienten)}$$
$$\dim(V_3) = \sum_{i=1}^{k} d_i = d \text{ (g_i hat d_i frei wählbare Koeffizienten)}$$
$$\dim(V_4) = \sum_{i=1}^{k} d_i = d \text{ (p_i hat d_i frei wählbare Koeffizienten)}$$

Um zu zeigen $V_i = V_j$, genügt es daher, $V_i \subseteq V_j$ zu zeigen.

Satz 226 (Forts.)

Gelten diese Bedingungen, so sind für eine Folge $(f_n)_{n\geq 0}$, mit

$$F(z) := \sum_{n\geq 0} f_n z^n$$

der zugehörigen Erzeugendenfunktion, die folgenden Aussagen äquivalent:

1. **Lineare Rekursion:** *(d ist die Ordnung der Rekursion)*

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0)\left[f_{n+d} + q_1 \cdot f_{n+d-1} + q_2 \cdot f_{n+d-2} + \ldots + q_d \cdot f_n = 0\right]$$

2. **Erzeugende Funktion:**

$$F(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

für ein Polynom $p(z)$ vom Grad $< d$.

Beweis:

Betrachte die komplexen Vektorräume

$$V_k = \{(f_n)_{n\geq 0} : (f_n)_{n\geq 0} \text{ erfüllt Eigenschaft } k\}$$

mit $k \in \{1, 2, 3, 4\}$. Es gilt:

$$\dim(V_1) = d$$
$$\dim(V_2) = d \text{ (p hat d frei wählbare Koeffizienten)}$$
$$\dim(V_3) = \sum_{i=1}^{k} d_i = d \text{ (g_i hat d_i frei wählbare Koeffizienten)}$$
$$\dim(V_4) = \sum_{i=1}^{k} d_i = d \text{ (p_i hat d_i frei wählbare Koeffizienten)}$$

Um zu zeigen $V_i = V_j$, genügt es daher, $V_i \subseteq V_j$ zu zeigen.

Beweis (Forts.):

- $V_1 = V_2$: Sei $(f_n)_{n\geq 0} \in V_2$. Wir wissen, dass

$$F(z) = \sum_{n\geq 0} f_n \cdot z^n = \frac{p(z)}{q(z)}.$$

Es ist

$$\tilde{F}(z) = (1 + q_1 z + q_2 z^2 + \ldots + q_d z^d) \cdot \sum_{n\geq 0} f_n z^n = p(z)$$

mit $\deg(p) \leq d - 1$, also $[z^{d+n}]p(z) = 0$ für alle $n \geq 0$. Betrachte für $n \geq 0$

$$[z^{d+n}]\tilde{F}(z) = f_{n+d} + f_{n+d-1}q_1 + \ldots + f_n q_d = 0\,.$$

Damit gilt, dass

$$(f_n)_{n\geq 0} \in V_1,$$

also $V_2 \subseteq V_1$, und damit $V_1 = V_2$.

Beweis (Forts.):

- $V_2 = V_3$: Sei $(f_n)_{n\geq 0} \in V_3$, also

$$F(z) = \sum_{i=1}^{k} \frac{g_i(z)}{(1-\alpha_i z)^{d_i}}.$$

Zu zeigen ist, dass

$$F(z) = \frac{p(z)}{q(z)}.$$

Betrachte hierzu

$$\prod_{i=1}^{k} (1-\alpha_i z)^{d_i}.$$

Wir wissen, dass

$$q^R(z) = \prod_{i=1}^{k} (z-\alpha_i)^{d_i}.$$

Beweis (Forts.):

Weiter gilt, dass

$$q^R(z) = z^d \cdot q(\frac{1}{z}),$$

also

$$\begin{aligned} q(z) = \left(q^R(z)\right)^R &= \left(\prod_{i=1}^{k} (z-\alpha_i)^{d_i}\right)^R \\ &= z^d \cdot \prod_{i=1}^{k} (\frac{1}{z}-\alpha_i)^{d_i} \\ &= \prod_{i=1}^{k} (1-\alpha_i z)^{d_i}. \end{aligned}$$

Beweis (Forts.):

- $V_2 = V_3$: Sei $(f_n)_{n\geq 0} \in V_3$, also

$$F(z) = \sum_{i=1}^{k} \frac{g_i(z)}{(1-\alpha_i z)^{d_i}}.$$

Zu zeigen ist, dass

$$F(z) = \frac{p(z)}{q(z)}.$$

Betrachte hierzu

$$\prod_{i=1}^{k} (1-\alpha_i z)^{d_i}.$$

Wir wissen, dass

$$q^R(z) = \prod_{i=1}^{k} (z-\alpha_i)^{d_i}.$$

Beweis (Forts.):

Daraus erhält man (durch Bilden des Hauptnenners)

$$F(z) = \frac{\sum_{i=1}^{k}\left(g_i(z) \cdot \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k} (1-\alpha_j z)^{d_j}\right)}{\prod_{i=1}^{k} (1-\alpha_i z)^{d_i}} = \frac{p(z)}{q(z)}.$$

Es ist damit

$$\deg(p(z)) < d_i + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k} d_j = d,$$

also $V_3 \subseteq V_2$ und damit $V_2 = V_3$.

Beweis (Forts.):

Daraus erhält man (durch Bilden des Hauptnenners)

$$F(z) = \frac{\sum_{i=1}^{k}\left(g_i(z)\cdot\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k}(1-\alpha_j z)^{d_j}\right)}{\prod_{i=1}^{k}(1-\alpha_i z)^{d_i}} = \frac{p(z)}{q(z)}.$$

Es ist damit

$$\deg(p(z)) < d_i + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k} d_j = d,$$

also $V_3 \subseteq V_2$ und damit $V_2 = V_3$.

- $V_3 = V_4$: Sei

$$(f_n)_{n\geq 0} \in V_3.$$

Zu zeigen ist, dass

$$(f_n)_{n\geq 0} \in V_4.$$

Es gilt, dass

$$F(z) = \sum_{i=1}^{k} \frac{g_i(z)}{(1-\alpha_i z)^{d_i}} \qquad \deg(g_i(z)) < d_i\,.$$

Aus Satz 222 (5) (Folie 376) wissen wir, dass

$$\frac{1}{(1-x)^c} = \sum_{n\geq 0}\binom{c+n-1}{n}\cdot x^n.$$

- $V_3 = V_4$: Sei

$$(f_n)_{n\geq 0} \in V_3.$$

Zu zeigen ist, dass

$$(f_n)_{n\geq 0} \in V_4.$$

Es gilt, dass

$$F(z) = \sum_{i=1}^{k} \frac{g_i(z)}{(1-\alpha_i z)^{d_i}} \qquad \deg(g_i(z)) < d_i\,.$$

Aus Satz 222 (5) (Folie 376) wissen wir, dass

$$\frac{1}{(1-x)^c} = \sum_{n\geq 0}\binom{c+n-1}{n}\cdot x^n.$$

Damit gilt, dass

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-\alpha_i z)^{d_i}} &= \sum_{n\geq 0}\binom{d_i+n-1}{n}\cdot(\alpha_i z)^n\\ &= \sum_{n\geq 0}\binom{d_i+n-1}{n}\cdot \alpha_i{}^n z^n\,.\end{aligned}$$

Beweis (Forts.):

Mit

$$g_i(z) = g_{i,0} + g_{i,1}z + \ldots + g_{i,d_i-1}z^{d_i-1} = \sum_{j=0}^{d_i-1} g_{i,j}z^j$$

gilt:

$$\frac{g_i(z)}{(1-\alpha_i z)^{d_i}} = \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{j=0}^{d_i-1} g_{i,j}\cdot\binom{d_i+n-j-1}{n-j}\cdot{\alpha_i}^{n-j}\right)\cdot z^n$$

Beweis (Forts.):

Mit

$$g_i(z) = g_{i,0} + g_{i,1}z + \ldots + g_{i,d_i-1}z^{d_i-1} = \sum_{j=0}^{d_i-1} g_{i,j}z^j$$

gilt:

$$\frac{g_i(z)}{(1-\alpha_i z)^{d_i}} = \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{j=0}^{d_i-1} g_{i,j}\cdot\binom{d_i+n-j-1}{n-j}\cdot{\alpha_i}^{n-j}\right)\cdot z^n$$

Beweis (Forts.):

Also gilt auch, dass

$$\begin{aligned}F(z) &= \sum_{i=1}^{k}\frac{g_i(z)}{(1-\alpha_i z)^{d_i}}\\ &= \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{i=1}^{k}\underbrace{\sum_{j=0}^{d_i-1}{\alpha_i}^{-j}\cdot g_{i,j}\cdot\binom{n+d_i-j-1}{d_i-1}}_{p_i(n)}\cdot{\alpha_i}^{n}\right)\cdot z^n\end{aligned}$$

Betrachte nun

$$f_n = [z^n]F(z) = \sum_{i=1}^{k} p_i(n)\cdot{\alpha_i}^n\,.$$

Es gilt, dass $\deg(p_i(n)) \leq d_i - 1$, und damit ist auch $(f_n)_{n\geq 0} \in V_4$, also $V_3 = V_4$. $\square$

Beweis (Forts.):

Also gilt auch, dass

$$\begin{aligned}F(z) &= \sum_{i=1}^{k}\frac{g_i(z)}{(1-\alpha_i z)^{d_i}}\\ &= \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{i=1}^{k}\underbrace{\sum_{j=0}^{d_i-1}{\alpha_i}^{-j}\cdot g_{i,j}\cdot\binom{n+d_i-j-1}{d_i-1}}_{p_i(n)}\cdot{\alpha_i}^{n}\right)\cdot z^n\end{aligned}$$

Betrachte nun

$$f_n = [z^n]F(z) = \sum_{i=1}^{k} p_i(n)\cdot{\alpha_i}^n\,.$$

Es gilt, dass $\deg(p_i(n)) \leq d_i - 1$, und damit ist auch $(f_n)_{n\geq 0} \in V_4$, also $V_3 = V_4$. $\square$

Anwendung: Sei eine homogene Rekursion gegeben, z. B.

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \qquad F_0 = 0, F_1 = 1$$

1. Drücke die Rekursion in einer einzigen Formel aus, inklusive der Anfangsbedingungen. Wie immer ist $F_n = 0$ für $n < 0$. $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ gilt auch für $n = 0$, aber für $n = 1$ ist $F_1 = 1$, die rechte Seite jedoch 0. Also ist die vollständige Rekursion

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} + \delta_{n,1},$$

mit

$$\delta_{n,m} = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

2. Interpretiere die Gleichung aus 1. mit Hilfe von erzeugenden Funktionen. Wir wissen schon, dass Indexerniedrigung einer Multiplikation mit einer Potenz von z entspricht. Also erhalten wir:

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} F_n z^n \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} F_{n-1} z^n + \sum_{n\in\mathbb{Z}} F_{n-2} z^n + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{n,1} z^n \\ &= z \cdot F(z) + z^2 \cdot F(z) + z \end{aligned}$$

3. Löse die Gleichung in $F(z)$. Das ist leicht:

$$F(z) = \frac{z}{1 - z - z^2}$$

4. Drücke die rechte Seite als formale Reihe aus und ermittle daraus die Koeffizienten. Dies ist der schwierigste Schritt. Zunächst schreiben wir $1 - z - z^2$ in der Form $1 - z - z^2 = (1 - \alpha z)(1 - \beta z)$ und ermitteln dann durch Partialbruchzerlegung die Konstanten a und b, so dass gilt:

$$\frac{1}{(1 - \alpha z)(1 - \beta z)} = \frac{a}{1 - \alpha z} + \frac{b}{1 - \beta z}\,.$$

Es ergibt sich z.B.

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \qquad \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

4. Drücke die rechte Seite als formale Reihe aus und ermittle daraus die Koeffizienten. Dies ist der schwierigste Schritt. Zunächst schreiben wir $1 - z - z^2$ in der Form $1 - z - z^2 = (1 - \alpha z)(1 - \beta z)$ und ermitteln dann durch Partialbruchzerlegung die Konstanten a und b, so dass gilt:

$$\frac{1}{(1 - \alpha z)(1 - \beta z)} = \frac{a}{1 - \alpha z} + \frac{b}{1 - \beta z}\,.$$

Es ergibt sich z.B.

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \qquad \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Diskrete Strukturen
©Ernst W. Mayr

Es gilt:

$$\begin{aligned}
F(z) &= z\left(\frac{a}{1-\alpha z}+\frac{b}{1-\beta z}\right)\\
&= z\left(a\sum_{n\geq 0}\alpha^n z^n + b\sum_{n\geq 0}\beta^n z^n\right)\\
&= \sum_{n\geq 1}(a\alpha^{n-1}+b\beta^{n-1})z^n
\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}
F_n &= a\alpha^{n-1}+b\beta^{n-1}\\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right),
\end{aligned}$$

nachdem man die Konstanten a und b etwa aus den Gleichungen für F_0 und F_1 bestimmt hat.

Es gilt:

$$\begin{aligned}
F(z) &= z\left(\frac{a}{1-\alpha z}+\frac{b}{1-\beta z}\right)\\
&= z\left(a\sum_{n\geq 0}\alpha^n z^n + b\sum_{n\geq 0}\beta^n z^n\right)\\
&= \sum_{n\geq 1}(a\alpha^{n-1}+b\beta^{n-1})z^n
\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}
F_n &= a\alpha^{n-1}+b\beta^{n-1}\\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right),
\end{aligned}$$

nachdem man die Konstanten a und b etwa aus den Gleichungen für F_0 und F_1 bestimmt hat.