

Title: Mayr: 2012 ds (23.10.2012)
Date: Tue Oct 23 13:45:07 CEST 2012
Duration: 91:22 min
Pages: 34

Diskrete Strukturen

Ernst W. Mayr

Fakultät für Informatik
TU München

<http://www14.in.tum.de/lehre/2012WS/ds/>

Wintersemester 2012

Eigenschaften von $f : A \rightarrow B$:

- f injektiv: $(\forall b \in B) [|f^{-1}(b)| \leq 1]$
- f surjektiv: $(\forall b \in B) [|f^{-1}(b)| \geq 1]$
- f bijektiv: $(\forall b \in B) [|f^{-1}(b)| = 1]$, d.h. injektiv und surjektiv
- Ist $f : A \rightarrow B$ eine Bijektion, dann ist auch f^{-1} eine bijektive Funktion.

Dies liegt daran, dass man für die Anwendung einer Funktion f auf ein Argument x

$$f(x)$$

und für die Anwendung von g nach f auf x dementsprechend

$$g(f(x)) = g \circ f(x)$$

schreibt.

Bemerkung:

Für die zugehörigen Relationen gilt daher:

$$\widehat{g \circ f} = \hat{g} \circ \hat{f}.$$

File Edit View Window Help Ctavi Picker

Eigenschaften von $f : A \rightarrow B$:

- f injektiv: $(\forall b \in B) [|f^{-1}(b)| \leq 1]$
- f surjektiv: $(\forall b \in B) [|f^{-1}(b)| \geq 1]$
- f bijektiv: $(\forall b \in B) [|f^{-1}(b)| = 1]$, d.h. injektiv und surjektiv
- Ist $f : A \rightarrow B$ eine Bijektion, dann ist auch f^{-1} eine bijektive Funktion.

TUM Diskrete Strukturen ©Ernst W. Mayr 35/60 LEA

File Edit View Window Help Ctavi Picker

Eigenschaften von $f : A \rightarrow B$:

Existiert eine Bijektion von A nach B , haben A und B gleiche Kardinalität.
 Warnung: Es gibt A, B mit $A \subsetneq B$, aber $|A| = |B|!$

Beispiel 15 ($|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}_0|$)

$$f : \mathbb{Z} \ni z \mapsto \begin{cases} 2z & z \geq 0 \\ -2z - 1 & z < 0 \end{cases} \in \mathbb{N}_0$$

TUM Diskrete Strukturen ©Ernst W. Mayr 4.3 Funktionen Deskeewing Image...

File Edit View Window Help Ctavi Picker

Eigenschaften von $f : A \rightarrow B$:

Existiert eine Bijektion von A nach B , haben A und B gleiche Kardinalität.
 Warnung: Es gibt A, B mit $A \subsetneq B$, aber $|A| = |B|!$

Beispiel 15 ($|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}_0|$)

$$f : \mathbb{Z} \ni z \mapsto \begin{cases} 2z & z \geq 0 \\ -2z - 1 & z < 0 \end{cases} \in \mathbb{N}_0$$

TUM Diskrete Strukturen ©Ernst W. Mayr 4.3 Funktionen Deskeewing Image...

File Edit View Window Help Ctavi Picker

Sei R eine Relation über A , \tilde{R} eine Relation über B .

- Eine Funktion $f : A \rightarrow B$ heißt Homomorphismus von R nach \tilde{R} , falls gilt:

$$(a_1, \dots, a_k) \in R \Rightarrow (f(a_1), \dots, f(a_k)) \in \tilde{R}$$
- Eine Bijektion $f : A \rightarrow B$ heißt Isomorphismus zwischen R und \tilde{R} , falls gilt:

$$(a_1, \dots, a_k) \in R \iff (f(a_1), \dots, f(a_k)) \in \tilde{R}$$

TUM Diskrete Strukturen ©Ernst W. Mayr Deskeewing Image...

Sei R eine Relation über A , \tilde{R} eine Relation über B .

- Eine Funktion $f : A \rightarrow B$ heißt **Homomorphismus** von R nach \tilde{R} , falls gilt:

$$(a_1, \dots, a_k) \in R \Rightarrow (f(a_1), \dots, f(a_k)) \in \tilde{R}$$
- Eine Bijektion $f : A \rightarrow B$ heißt **Isomorphismus** zwischen R und \tilde{R} , falls gilt:

$$(a_1, \dots, a_k) \in R \iff (f(a_1), \dots, f(a_k)) \in \tilde{R}$$

⋄

TUM Diskrete Strukturen
© Ernst W. Mayr

Beispiel 16

Relation: Die Kantenmenge $E = \{\{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$ des Graphen mit der Knotenmenge $\{0, 1, 2, 3\}$
 Funktion: Spiegelung der Knotenmenge wie gezeichnet an der Mittelachse

⋄

$E' = \{\{0', 1'\}, \{1', 3'\}, \{0', 2'\}, \{2', 3'\}\}$
 f ist ein Isomorphismus bzgl. (der Relation) E .

TUM Diskrete Strukturen
© Ernst W. Mayr

Sei R eine Relation über A , \tilde{R} eine Relation über B .

- Eine Funktion $f : A \rightarrow B$ heißt **Homomorphismus** von R nach \tilde{R} , falls gilt:

$$(a_1, \dots, a_k) \in R \Rightarrow (f(a_1), \dots, f(a_k)) \in \tilde{R}$$
- Eine Bijektion $f : A \rightarrow B$ heißt **Isomorphismus** zwischen R und \tilde{R} , falls gilt:

$$(a_1, \dots, a_k) \in R \iff (f(a_1), \dots, f(a_k)) \in \tilde{R}$$

⋄

TUM Diskrete Strukturen
© Ernst W. Mayr

Eigenschaften von $f : A \rightarrow B$:

Existiert eine Bijektion von A nach B , haben A und B *gleiche Kardinalität*.
 Warnung: Es gibt A, B mit $A \subsetneq B$, aber $|A| = |B|!$

Beispiel 15 ($|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}_0|$)

$$f : \mathbb{Z} \ni z \mapsto \begin{cases} 2z & z \geq 0 \\ -2z - 1 & z < 0 \end{cases} \in \mathbb{N}_0$$

Cantor

TUM Diskrete Strukturen
© Ernst W. Mayr

Sei R eine Relation über A , \tilde{R} eine Relation über B .

- Eine Funktion $f : A \rightarrow B$ heißt **Homomorphismus** von R nach \tilde{R} , falls gilt:

$$(a_1, \dots, a_k) \in R \Rightarrow (f(a_1), \dots, f(a_k)) \in \tilde{R}$$
- Eine Bijektion $f : A \rightarrow B$ heißt **Isomorphismus** zwischen R und \tilde{R} , falls gilt:

$$(a_1, \dots, a_k) \in R \iff (f(a_1), \dots, f(a_k)) \in \tilde{R}$$

+

TUM Diskrete Strukturen © Ernst W. Mayr 37/60 LEA

Schreibweisen für wichtige Funktionen:

- $\lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$
 $\mathbb{R} \ni x \mapsto \lfloor x \rfloor := \max\{y \in \mathbb{Z}; y \leq x\} \in \mathbb{Z}$
 („untere Gaußklammer“, „floor“, „entier“)
- $\lceil \cdot \rceil : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$
 $\mathbb{R} \ni x \mapsto \lceil x \rceil := \min\{y \in \mathbb{Z}; y \geq x\} \in \mathbb{Z}$
 („obere Gaußklammer“, „ceiling“)

Beispiel 17

$$\lfloor \pi \rfloor = 3, \lfloor -\pi \rfloor = -4, \lfloor x \rfloor - \lfloor x \rfloor = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

+

TUM Diskrete Strukturen © Ernst W. Mayr Deskeewing Image...

4.4 Partielle Ordnungen

Sei (S, \preceq) eine partielle Ordnung.

Beispiel 18
 $S = |P(A), \preceq \equiv \subseteq, A = \{1, 2, 3\}$
 Hassediagramm:

+

TUM Diskrete Strukturen 4.4 Partielle Ordnungen © Ernst W. Mayr Deskeewing Image...

4.4 Partielle Ordnungen

Sei (S, \preceq) eine partielle Ordnung.

Beispiel 18
 $S = |P(A), \preceq \equiv \subseteq, A = \{1, 2, 3\}$
 Hassediagramm:

+

TUM Diskrete Strukturen 4.4 Partielle Ordnungen © Ernst W. Mayr Deskeewing Image...

Eigenschaften partieller Ordnungen:

- $a, b \in S$ heißen **vergleichbar** (bzgl. \preceq), falls $a \preceq b$ oder $b \preceq a$, sonst **unvergleichbar**.
- Ein Element $a \in S$ heißt **minimal**, falls $(\nexists b \in S)[b \neq a \wedge b \preceq a]$.
- Ein Element $a \in S$ heißt **maximal**, falls $(\nexists b \in S)[b \neq a \wedge a \preceq b]$.
- Eine partielle Ordnung heißt **linear** oder **vollständig**, falls sie keine unvergleichbaren Elemente enthält (z. B. (\mathbb{N}_0, \leq)).

TUM Diskrete Strukturen © Ernst W. Mayr

4.4 Partielle Ordnungen

Sei (S, \preceq) eine partielle Ordnung.

Beispiel 18

$S = P(A)$, $A = \{1, 2, 3\}$
 Hassediagramm:

TUM Diskrete Strukturen 4.4 Partielle Ordnungen 40/60 LEA

4.4 Partielle Ordnungen

Sei (S, \preceq) eine partielle Ordnung.

Beispiel 18

$S = P(A)$, $A = \{1, 2, 3\}$
 Hassediagramm:

TUM Diskrete Strukturen 4.4 Partielle Ordnungen

Eigenschaften partieller Ordnungen:

- $a, b \in S$ heißen **vergleichbar** (bzgl. \preceq), falls $a \preceq b$ oder $b \preceq a$, sonst **unvergleichbar**.
- Ein Element $a \in S$ heißt **minimal**, falls $(\nexists b \in S)[b \neq a \wedge b \preceq a]$.
- Ein Element $a \in S$ heißt **maximal**, falls $(\nexists b \in S)[b \neq a \wedge a \preceq b]$.
- Eine partielle Ordnung heißt **linear** oder **vollständig**, falls sie keine unvergleichbaren Elemente enthält (z. B. (\mathbb{N}_0, \leq)).

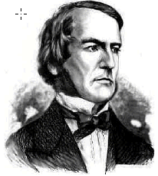
TUM Diskrete Strukturen

4.5 Boolesche Ausdrücke und Funktionen, Logiken

Oft ordnen wir Aussagen über irgendwelche Gegebenheiten die Werte *true* oder *false* zu. Daneben verwenden wir auch Verknüpfungen solcher Aussagen mittels Operatoren wie z.B. „und“, „oder“, oder der Negation.

Der Boolesche Aussagenkalkül stellt für dieses Vorgehen einen formalen Rahmen dar.

TUM Diskrete Strukturen
© Ernst W. Mayr



George Boole
lived from 1815 to 1864


Boole approached logic in a new way reducing it to a simple algebra, incorporating logic into mathematics. He also worked on differential equations, the calculus of finite differences and general methods in probability.

more on George Boole

TUM Diskrete Strukturen
© Ernst W. Mayr

George Boole

Born: 2 Nov 1815 in Lincoln, Lincolnshire, England
Died: 8 Dec 1864 in Ballintemple, County Cork, Ireland



Click the picture above to see two larger pictures

[Show birthplace location](#)

[Previous](#) (Chronologically) [Next](#) [Biographies Index](#)
[Previous](#) (Alphabetically) [Next](#) [Main index](#)

George Boole first attended a school in Lincoln, then a commercial school. His early instruction in mathematics, however, was from his father who also gave George a liking for constructing optical instruments. George's interests turned to languages and he received instruction in Latin from a local bookseller.

By the age of 12 George had become so skilled in Latin that it provoked an argument. He translated an ode by the Latin poet Horace which his father was so proud of that he had it published. However the talent was such that a local schoolmaster disputed that any 12 year old could have written with such depth.

Boole did not study for an academic degree, but from the age of 16 he was an assistant school teacher. He maintained his interest in languages and intended to enter the Church. From 1835, however, he seems to have changed his mind for he opened his own school and began to study mathematics on his own. He was later to realise that he had almost wasted five years in trying to teach himself the subject instead of having a skilled teacher.

At this time Boole studied the works of [Laplace](#) and [Lagrange](#), making notes which would later be the basis for his first mathematics paper. However he did receive encouragement from [Duncan Gregory](#) who at this time was in Cambridge and the editor of the recently founded *Cambridge Mathematical Journal*.

skilled teacher.

At this time Boole studied the works of [Laplace](#) and [Lagrange](#), making notes which would later be the basis for his first mathematics paper. However he did receive encouragement from [Duncan Gregory](#) who at this time was in Cambridge and the editor of the recently founded *Cambridge Mathematical Journal*.

Boole was unable to take [Duncan Gregory's](#) advice and study courses at Cambridge as he required the income from his school to look after his parents. However he began publishing in the *Cambridge Mathematical Journal*, and his interests were also influenced by [Duncan Gregory](#) as he began to study algebra. An application of algebraic methods to the solution of [differential equations](#) was published by Boole in the *Transactions of the Royal Society* and for this work he received the Society's Royal Medal. His mathematical work was beginning to bring him fame.

Boole was appointed to the chair of mathematics at Queens College, Cork in 1849. He taught there for the rest of his life, gaining a reputation as an outstanding and dedicated teacher.

In 1854 he published *An investigation into the Laws of Thought, on Which are founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities*. Boole approached logic in a new way reducing it to a simple algebra, incorporating logic into mathematics. He pointed out the analogy between algebraic symbols and those that represent logical forms. It began the algebra of logic called [Boolean algebra](#) which now finds application in computer construction, switching circuits etc.

Boole also worked on differential equations, the influential *Treatise on Differential Equations* appeared in 1859, the calculus of finite differences, *Treatise on the Calculus of Finite Differences* (1860), and general methods in probability. He published around 50 papers and was one of the first to investigate the basic properties of numbers, such as the distributive property, that underlie the subject of algebra.

Many honours were given to Boole as the genius in his work was recognised. He received honorary degrees from the universities of Dublin and Oxford and was elected a Fellow of the Royal Society (1857). However his career, which was started rather late, came to an unfortunately early end when he died at the age of 49. The circumstances are described by Macfarlane in [17] as follows:

One day in 1864 he walked from his residence to the College, a distance of two miles, in the drenching rain, and lectured in wet clothes. The result was a feverish cold which soon fell upon his lungs and terminated his career

What Macfarlane fails to say is that Boole's wife (Mary - niece of Sir George Everest, after whom the mountain is named) believed that a remedy should resemble the cause. She put Boole to bed and threw buckets of water over the bed since his illness had been caused by getting wet.


[Hirst](#) described Boole as:

... evidently an earnest able and at the same time a genial man.

His work was praised by [De Morgan](#) who said:

Boole's system of logic is but one of many proofs of genius and patience combined. ... That the symbolic processes of algebra, invented as tools of numerical calculation, should be competent to express every act of thought, and to furnish the grammar and dictionary of an all-containing system of logic, would not have been believed until it was proved. When [Hobbes](#) ... published his "Computation or Logique" he had a remote glimpse of some of the points which are placed in the light of day by Mr Boole

George Boole



lived from 1815 to 1864

Boole approached logic in a new way reducing it to a simple algebra, incorporating logic into mathematics. He also worked on differential equations, the calculus of finite differences and general methods in probability.

[more on George Boole](#)

TUM Diskrete Strukturen ©Ernst W. Mayr 43/60 LEA

Logik

- Logik ist die Wissenschaft des (begrifflichen) Schließens. Sie untersucht, welche Inferenzen korrekt sind.
- Unter Inferenz verstehen wir (informell) eine Aussage der Form:
- Alternative Sprechweisen:
- Dabei heißt A jeweils die Annahme (Prämisse, Antezedens, Hypothese) und B die Konklusion (Folgerung, Conclusio, Konsequenz).

TUM Diskrete Strukturen ©Ernst W. Mayr

Logik

- Logik ist die Wissenschaft des (begrifflichen) Schließens. Sie untersucht, welche Inferenzen korrekt sind.
- Unter Inferenz verstehen wir (informell) eine Aussage der Form:
wenn A gilt/wahr ist, dann auch B .
- Alternative Sprechweisen:
 - „Wenn A , dann B “
 - „Aus A folgt B “, „ B ist eine Folge von A “
 - „ A impliziert B “, „ $A \Rightarrow B$ “
 - „Wenn B nicht gilt, dann kann auch A nicht gelten“
 - „ A nur wenn B “
- Dabei heißt A jeweils die Annahme (Prämisse, Antezedens, Hypothese) und B die Konklusion (Folgerung, Conclusio, Konsequenz).

TUM Diskrete Strukturen ©Ernst W. Mayr

Logik

- Logik ist die Wissenschaft des (begrifflichen) Schließens. Sie untersucht, welche Inferenzen korrekt sind.
- Unter Inferenz verstehen wir (informell) eine Aussage der Form:
wenn A gilt/wahr ist, dann auch B .
- Alternative Sprechweisen:
 - ~~„Wenn A , dann B “~~
 - ~~„Aus A folgt B “, „ B ist eine Folge von A “~~
 - ~~„ A impliziert B “, „ $A \Rightarrow B$ “~~
 - ~~„Wenn B nicht gilt, dann kann auch A nicht gelten“~~
 - ~~„ A nur wenn B “~~
- Dabei heißt A jeweils die Annahme (Prämisse, Antezedens, Hypothese) und B die Konklusion (Folgerung, Conclusio, Konsequenz).

Handwritten notes:
 $A \Rightarrow B$
 $\neg A$
 $\neg B$
 es sei denn B if not unless

TUM Diskrete Strukturen ©Ernst W. Mayr 44/60 LEA

Logik

- Logik ist die Wissenschaft des (begrifflichen) Schließens. Sie untersucht, welche Inferenzen korrekt sind.
- Unter Inferenz verstehen wir (informell) eine Aussage der Form:

wenn A gilt/wahr ist, dann auch B .
- Alternative Sprechweisen:
 - „Wenn A , dann B “
 - „Aus A folgt B “, „ B ist eine Folge von A “
 - „ A impliziert B “, „ $A \Rightarrow B$ “
 - „Wenn B nicht gilt, dann kann auch A nicht gelten“
 - „ A nur wenn B “
- Dabei heißt A jeweils die Annahme (Prämisse, Antezedens, Hypothese) und B die Konklusion (Folgerung, Conclusio, Konsequenz).

TUM Diskrete Strukturen ©Ernst W. Mayr 4.5 Boolesche Ausdrücke und Funktionen, Logik

Logik

- Logik ist die Wissenschaft des (begrifflichen) Schließens. Sie untersucht, welche Inferenzen korrekt sind.
- Unter Inferenz verstehen wir (informell) eine Aussage der Form:

wenn A gilt/wahr ist, dann auch B .
- ~~Alternative Sprechweisen:

 - „Wenn A , dann B “
 - „Aus A folgt B “, „ B ist eine Folge von A “
 - „ A impliziert B “, „ $A \Rightarrow B$ “
 - „Wenn B nicht gilt, dann kann auch A nicht gelten“
 - „ A nur wenn B “~~
- Dabei heißt A jeweils die Annahme (Prämisse, Antezedens, Hypothese) und B die Konklusion (Folgerung, Conclusio, Konsequenz).

Handwritten notes: $A \Rightarrow B$, $\neg A$, B , $\neg B$, A es sei denn B if not unless

TUM Diskrete Strukturen ©Ernst W. Mayr

Logik

- Logik ist die Wissenschaft des (begrifflichen) Schließens. Sie untersucht, welche Inferenzen korrekt sind.
- Unter Inferenz verstehen wir (informell) eine Aussage der Form:

wenn A gilt/wahr ist, dann auch B .
- Alternative Sprechweisen:
 - „Wenn A , dann B “
 - „Aus A folgt B “, „ B ist eine Folge von A “
 - „ A impliziert B “, „ $A \Rightarrow B$ “
 - „Wenn B nicht gilt, dann kann auch A nicht gelten“
 - „ A nur wenn B “
- Dabei heißt A jeweils die Annahme (Prämisse, Antezedens, Hypothese) und B die Konklusion (Folgerung, Conclusio, Konsequenz).

TUM Diskrete Strukturen ©Ernst W. Mayr 4.5 Boolesche Ausdrücke und Funktionen, Logik

Bemerkung:

- Unter einer Implikation versteht man gewöhnlich einen Ausdruck/eine Behauptung der Form

aus A folgt B bzw. $A \Rightarrow B$.
- Unter einer Inferenz versteht man den Vorgang, (im Rahmen einer Logik) für A und B (wie oben) von der Aussage/Behauptung A zu der Aussage/Behauptung B zu kommen.

TUM Diskrete Strukturen ©Ernst W. Mayr

File Edit View Window Help Ctavi Picker

Achtung!

Wenn (irgendwie) eine Implikation
aus A folgt B

gilt/wahr ist, so heißt das von sich aus noch **nicht**, dass

- A gilt/wahr ist, oder
- B gilt/wahr ist.

Es sagt nur, dass, wenn A gilt, dann auch B .

TUM Diskrete|Strukturen ©Ernst W. Mayr

Deskewing Image...

File Edit View Window Help Ctavi Picker

Aussagenlogik (Propositional Logic)

- Aussagen werden aus einer vorgegebenen Menge von **atomaren** Aussagen (Platzhaltern für Aussagen) mit Hilfe der **Operatoren (Konnektoren, Junktoren)** „und“, „oder“, „nicht“ und „wenn, ... dann“(u.a.) gebildet.
- Atomare (aussagenlogische) Aussagen sind **entweder wahr oder falsch**.
- Die Grundlagen der Aussagenlogik wurden von George Boole („The Laws of Thought“, 1854) entwickelt (s.o.). Man spricht deshalb auch von der **Booleschen Logik**.

TUM Diskrete|Strukturen ©Ernst W. Mayr

Deskewing Image...

File Edit View Window Help Ctavi Picker

Aussagenlogik (Propositional Logic)

- Aussagen werden aus einer vorgegebenen Menge von **atomaren** Aussagen (Platzhaltern für Aussagen) mit Hilfe der **Operatoren (Konnektoren, Junktoren)** „und“, „oder“, „nicht“ und „wenn, ... dann“(u.a.) gebildet.
- Atomare (aussagenlogische) Aussagen sind **entweder wahr oder falsch**.
- Die Grundlagen der Aussagenlogik wurden von George Boole („The Laws of Thought“, 1854) entwickelt (s.o.). Man spricht deshalb auch von der **Booleschen Logik**.

TUM Diskrete|Strukturen ©Ernst W. Mayr

4.5 Boolesche Ausdrücke und Funktionen, Logik

Deskewing Image...