Script generated by TTT

Title:	Esparza: DWT (05.06.2012)
Date:	Tue Jun 05 14:18:32 CEST 2012
Duration:	89:23 min
Pages:	47

Kontinuierliche W'keitsräume

Ein größeres Problem

- Problem: kein Ansatz funktioniert, wenn jede Menge von Elementarereignissen ein Ereignis bilden soll.
  – Die folgenden Bedingungen sind inkonsistent:
    1. Jede Menge ist ein Ereignis
    2. W'keit von Ω ist 1
    3. W'keit der Vereinigung von endlich vielen disjunkten Ereignissen ist Summe der W'keiten
    4. W'keit einer Menge ist invariant durch Translation
- -> Nicht jede Menge darf ein Ereignis sein

Was mindestens gelten sollte

- σ-Algebren: minimale Anforderungen an die Mengen, die Ereignisse bilden
  – Komplement eines Ereignisses muss Ereignis sein
  – Abzählbare Vereinigung von Ereignissen muss Ereignis sein
- Kolmogorov-Axiome: Minimale Anforderungen an die W'keitsmaße:
  – Pr[Ω] = 1
  – W'keit von disjunkter Vereinigung ist Summe der Warscheinlichkeiten

In der Praxis

- Wie finden wir σ-Algebren und W'keitsmaße?
  - Satz: Die borel'schen Mengen über ein Intervall bilden eine σ-Algebra
  - Satz: Eine messbare Funktion f mit der Eigenschaft $\int_\Omega f\, d\lambda = 1$ (Lebesgue-Integral) ist ein W'keitsmaß

Also: wir bilden W'keitsräume, indem wir die borel'schen Mengen über ein Intervall und eine solche messbare Funktion angeben

Messbare Funktionen

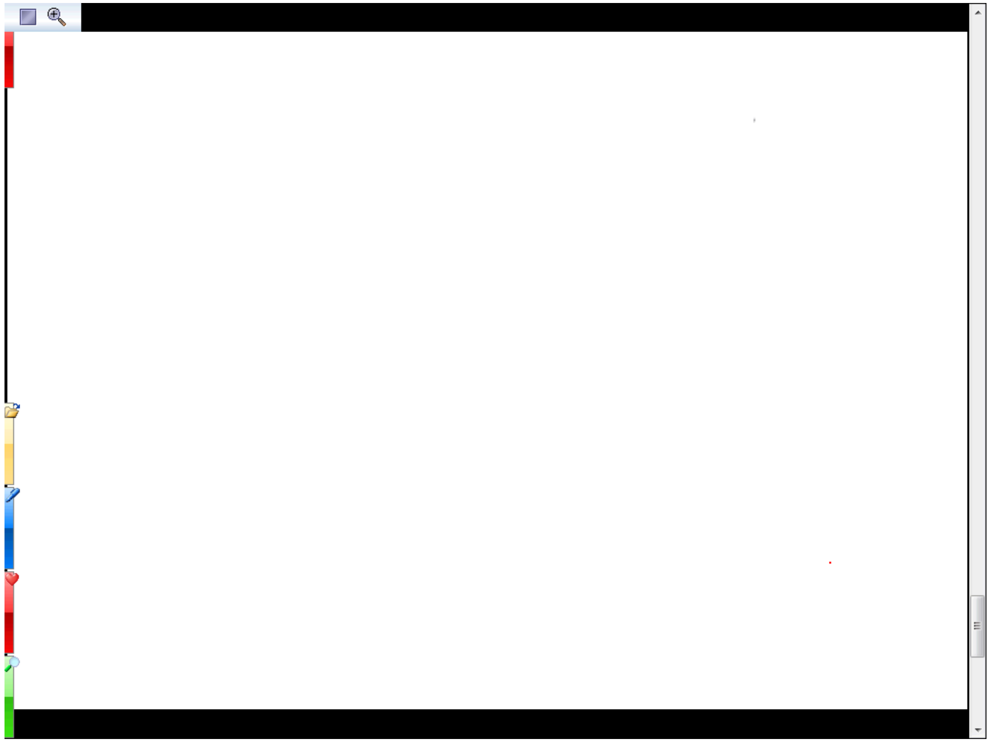
- Wie prüfen wir, ob eine Funktion messbar ist?
  - Wir benutzen: stückweise stetige Funktionen sind messbar, Summe und Produkte messbarer Funktionen sind messbar
- Wie prüfen wir, ob $\int_\Omega f\, d\lambda = 1$ gilt ?
  - Wir benutzen den Satz: wenn f in Ω=[(a,b]) beschränkt ist, dann gilt $\int_\Omega f\, d\lambda = \int_a^b f(x)dx$

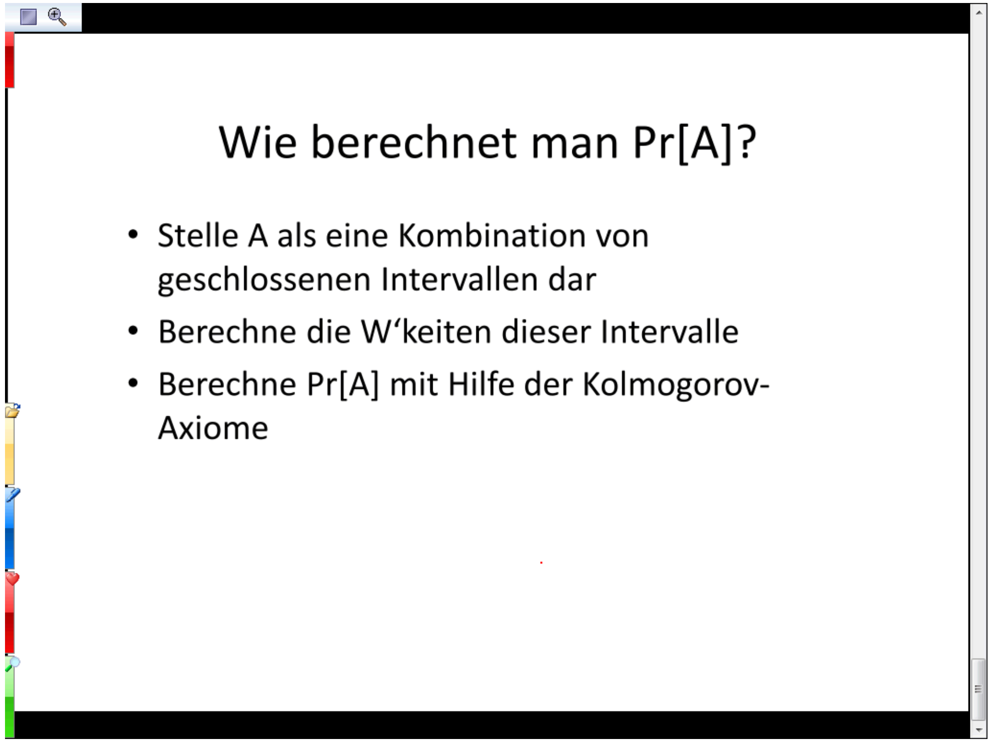
Beispiele von W'keitsraüme

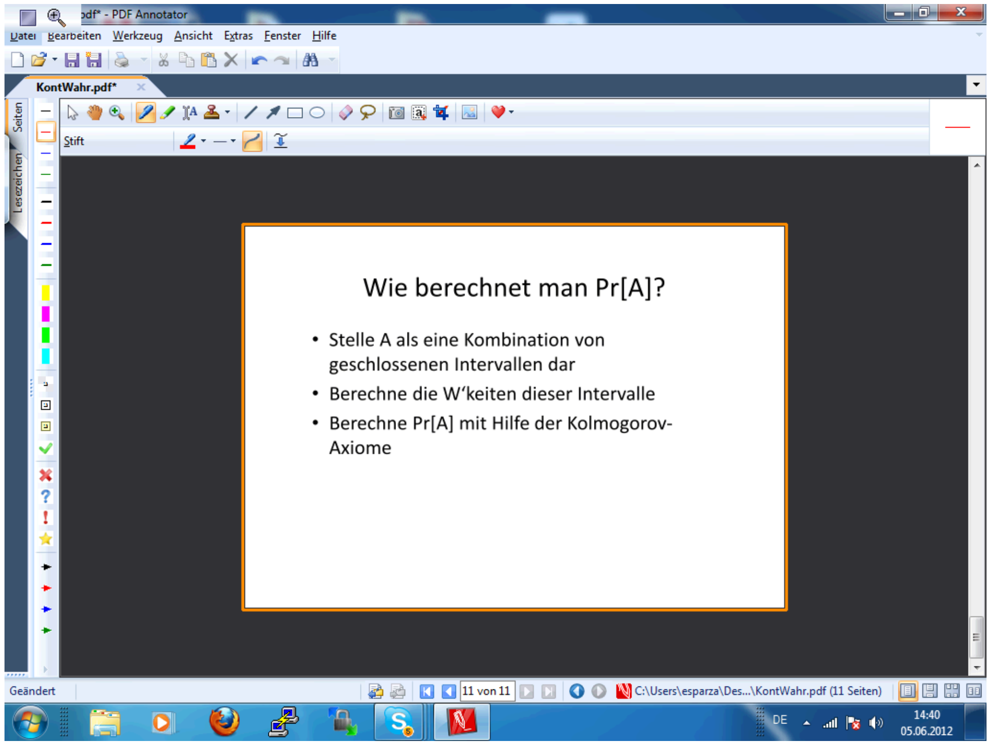
- B([0,1]) $f(x) = 1$
- B([a,b]) $f(x) = 1/(b-a)$
- B([1,2]) $f(x) = 3x^2/7$
- B([0,∞)] $f(x) = \lambda e^{-\lambda t}$ λ>0
- B([- ∞,∞)] $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

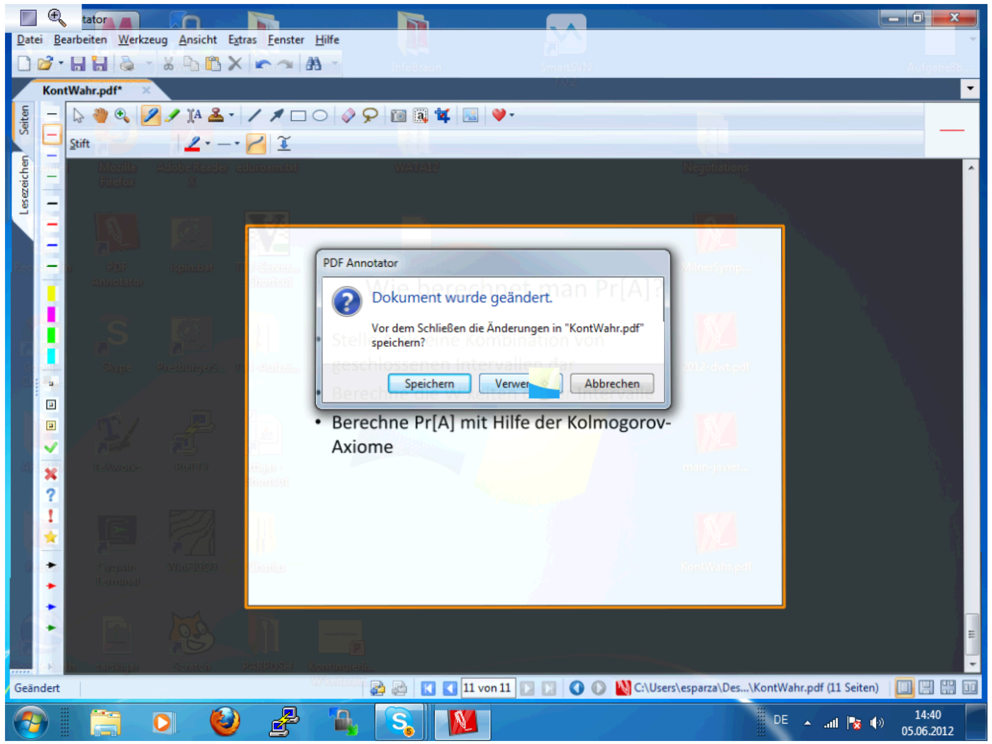
Wie berechnet man Pr[A]?

- Stelle A als eine Kombination von geschlossenen Intervallen dar
- Berechne die W'keiten dieser Intervalle
- Berechne Pr[A] mit Hilfe der Kolmogorov-Axiome




Wie berechnet man Pr[A]?
• Stelle A als eine Kombination von geschlossenen Intervallen dar
• Berechne die W'keiten dieser Intervalle
• Berechne Pr[A] mit Hilfe der Kolmogorov-Axiome


pdf* - PDF Annotator
Datei Bearbeiten Werkzeug Ansicht Extras Fenster Hilfe
KontWahr.pdf*
Stift
Wie berechnet man Pr[A]?
• Stelle A als eine Kombination von geschlossenen Intervallen dar
• Berechne die W'keiten dieser Intervalle
• Berechne Pr[A] mit Hilfe der Kolmogorov-Axiome
Geändert
11 von 11
C:\Users\esparza\Des...\KontWahr.pdf (11 Seiten)
DE
14:40
05.06.2012


Datei Bearbeiten Werkzeug Ansicht Extras Fenster Hilfe
KontWahr.pdf*
Stift
PDF Annotator
Dokument wurde geändert.
Vor dem Schließen die Änderungen in "KontWahr.pdf" speichern?
Speichern
Abbrechen
• Berechne Pr[A] mit Hilfe der Kolmogorov-Axiome
Geändert
11 von 11
C:\Users\esparza\Des...\KontWahr.pdf (11 Seiten)
DE
14:40
05.06.2012

1.2 Kontinuierliche Zufallsvariablen

Wir betrachten W'keitsräume mit $\Omega = \mathbb{R}$ und $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Eine stetige Zufallsvariable über einen solchen W'keitsraum wird durch eine integrierbare Dichte(-funktion) $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ mit der Eigenschaft

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

definiert.

Analog zum diskreten Fall ordnen wir jeder Dichte f_X eine Verteilung oder Verteilungsfunktion F_X zu:

$$F_X(x) := \Pr[X \le x] = \Pr[\{t \in \mathbb{R} \mid t \le x\}] = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t.$$

1.2 Kontinuierliche Zufallsvariablen

Wir betrachten W'keitsräume mit $\Omega = \mathbb{R}$ und $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Eine stetige Zufallsvariable über einen solchen W'keitsraum wird durch eine integrierbare Dichte(-funktion) $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ mit der Eigenschaft

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

$$\Pr[a \le X \le b] = \int_a^b f_X(x)\,dx$$

definiert.

Analog zum diskreten Fall ordnen wir jeder Dichte f_X eine Verteilung oder Verteilungsfunktion F_X zu:

$$F_X(x) := \Pr[X \le x] = \Pr[\{t \in \mathbb{R} \mid t \le x\}] = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t.$$

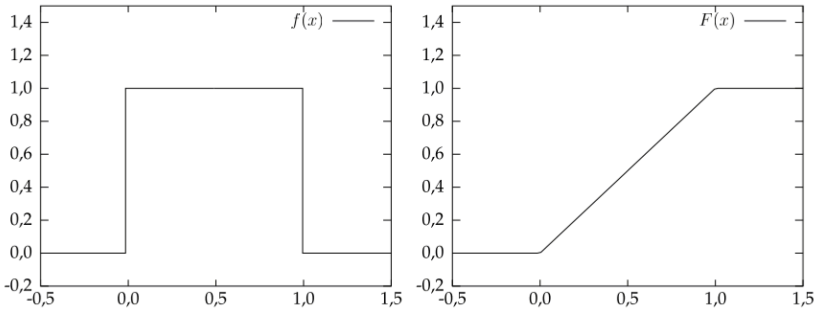
Beispiel 58 (Gleichverteilung)

Eine besonders einfache kontinuierliche Dichte stellt die Gleichverteilung auf dem Intervall $[a,b]$ dar. Sie ist definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{für } x \in [a,b], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Verteilungsfunktion der Gleichverteilung:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{für } x < a, \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{für } a \le x \le b, \\ 1 & \text{für } x > b. \end{cases}$$



Gleichverteilung über dem Intervall $[0, 1]$

Beobachtungen: *(Eigenschaften der Verteilungsfunktion)*

- F_X ist monoton steigend.
- F_X ist stetig. Man spricht daher auch von einer „stetigen Zufallsvariablen".
- Es gilt: $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ und $\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$.
- Jeder (außer an endlich vielen Punkten) differenzierbaren Funktion F, welche die zuvor genannten Eigenschaften erfüllt, können wir eine Dichte f durch $f(x) = F'(x)$ zuordnen.

Es gilt

$$\Pr[a < X \le b] = F_X(b) - F_X(a)\,.$$

Bei den von uns betrachteten Dichten besteht zwischen den Ereignissen „$a < X \le b$", „$a \le X \le b$", „$a \le X < b$" und „$a < X < b$" kein wesentlicher Unterschied, da

$$\int_{[a,b]} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{]a,b]} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{[a,b[} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{]a,b[} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1.2.1 Rechnen mit kontinuierlichen Zufallsvariablen

Sei $Y := g(X)$ mit einer Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Die Verteilung von Y erhalten wir durch

$$F_Y(y) = \Pr[Y \le y] = \Pr[g(X) \le y] = \int_C f_X(t)\,\mathrm{d}t.$$

Hierbei bezeichnet $C := \{t \in \mathbb{R} \mid g(t) \le y\}$ alle reellen Zahlen $t \in \mathbb{R}$, für welche die Bedingung „$Y \le y$" zutrifft. Das Integral über C ist nur dann sinnvoll definiert, wenn C ein zulässiges Ereignis darstellt. Aus der Verteilung F_Y können wir durch Differenzieren die Dichte f_Y ermitteln.

Beispiel 59

Sei X gleichverteilt auf dem Intervall $]0,1[$. Für eine Konstante $\lambda > 0$ definieren wir die Zufallsvariable $Y := -(1/\lambda)\ln X$.

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= \Pr[-(1/\lambda)\ln X \le y] = \Pr[\ln X \ge -\lambda y] \\
&= \Pr[X \ge e^{-\lambda y}] \\
&= 1 - F_X(e^{-\lambda y}) \\
&= \begin{cases} 1 - e^{-\lambda y} & \text{für } y \ge 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

$f(x) = 1$

Beispiel 59

Sei X gleichverteilt auf dem Intervall $]0,1[$. Für eine Konstante $\lambda > 0$ definieren wir die Zufallsvariable $Y := -(1/\lambda)\ln X$.

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= \Pr[-(1/\lambda)\ln X \le y] = \Pr[\ln X \ge -\lambda y] \\
&= \boxed{\Pr[X \ge e^{-\lambda y}]} \\
&= 1 - \boxed{F_X(e^{-\lambda y})} \\
&= \begin{cases} 1 - e^{-\lambda y} & \text{für } y \ge 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

$= \int_{e^{-\lambda y}}^{\infty} f_X(x)\,dx$

Beispiel (Forts.)

Damit folgt mit $f_Y(y) = F_Y'(y)$ sofort

$$
f_Y(y) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y} & \text{für } y \ge 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}
$$

Eine Zufallsvariable mit einer solchen Dichte f_Y nennt man exponentialverteilt.

Beispiel 60

Sei X eine beliebige Zufallsvariable. Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ definieren wir die Zufallsvariable $Y := a \cdot X + b$.

Es gilt

$$
F_Y(y) = \Pr[aX + b \le y] = \Pr\left[X \le \frac{y-b}{a}\right] = F_X\left(\frac{y-b}{a}\right),
$$

und somit

$$
f_Y(y) = \frac{\mathrm{d}\,F_Y(y)}{\mathrm{d}\,y} = \frac{\mathrm{d}\,F_X((y-b)/a)}{\mathrm{d}\,y} = f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \cdot \frac{1}{a}.
$$

Simulation von Zufallsvariablen Unter der Simulation einer Zufallsvariablen X mit Dichte f_X versteht man die algorithmische Erzeugung von Zufallswerten, deren Verteilung der Verteilung von X entspricht.

Dazu nehmen wir an, dass die zu simulierende Zufallsvariable X eine stetige, im Bildbereich $]0,1[$ streng monoton wachsende Verteilungsfunktion F_X besitzt. Weiter nehmen wir an, dass U eine auf $]0,1[$ gleichverteilte Zufallsvariable ist, die wir simulieren können.

Aus unserer Annahme über F_X folgt, dass es zu F_X eine (eindeutige) inverse Funktion F_X^{-1} gibt mit $F_X(F_X^{-1}(x)) = x$ für alle $x \in]0,1[$.

$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$

Simulation von Zufallsvariablen Unter der Simulation einer Zufallsvariablen X mit Dichte f_X versteht man die algorithmische Erzeugung von Zufallswerten, deren Verteilung der Verteilung von X entspricht.

Dazu nehmen wir an, dass die zu simulierende Zufallsvariable X eine stetige, im Bildbereich $]0,1[$ streng monoton wachsende Verteilungsfunktion F_X besitzt. Weiter nehmen wir an, dass U eine auf $]0,1[$ gleichverteilte Zufallsvariable ist, die wir simulieren können.

Aus unserer Annahme über F_X folgt, dass es zu F_X eine (eindeutige) inverse Funktion F_X^{-1} gibt mit $F_X(F_X^{-1}(x)) = x$ für alle $x \in]0,1[$.

Sei nun

$$\tilde{X} := F_X^{-1}(U)\,,$$

dann gilt

$$\begin{aligned}
\Pr[\tilde{X} \le t] &= \Pr[F_X^{-1}(U) \le t] \\
&= \Pr[U \le F_X(t)] \\
&= F_U(F_X(t)) \\
&= F_X(t)\,.
\end{aligned}$$

Beispiel 61

Im obigen Beispiel der Exponentialverteilung gilt $F_X(t) = 1 - e^{-t}$ für $t \ge 0$, und wir erhalten auf $]0,1[$ die Umkehrfunktion $F_X^{-1}(t) = -\ln(1-t)$. Also gilt $\tilde{X} = F_X^{-1}(U) = -\ln(1-U)$.

Statt $\tilde{X}$ haben wir im Beispiel die Zufallsvariable $-\ln U$ betrachtet, die aber offensichtlich dieselbe Verteilung besitzt.

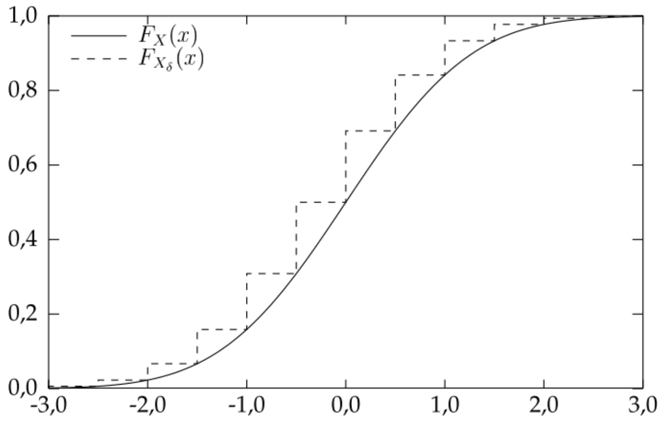
1.2.2 Kontinuierliche Zufallsvariablen als Grenzwerte diskreter Zufallsvariablen

Sei X eine kontinuierliche Zufallsvariable. Wir können aus X leicht eine diskrete Zufallsvariable konstruieren, indem wir für ein festes $\delta > 0$ definieren

$$X_\delta = n\delta \iff X \in [n\delta, (n+1)\delta[\text{ für } n \in \mathbb{Z}.$$

Für X_δ gilt

$$\Pr[X_\delta = n\delta] = F_X((n+1)\delta) - F_X(n\delta)\,.$$



Für $\delta \to 0$ nähert sich die Verteilung von X_δ der Verteilung von X immer mehr an.

1.2.3 Erwartungswert und Varianz

Definition 62

Für eine kontinuierliche Zufallsvariable X ist der Erwartungswert definiert durch

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f_X(t)\,\mathrm{d}t,$$

sofern das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} |t| \cdot f_X(t)\,\mathrm{d}t$ endlich ist.

Für die Varianz gilt entsprechend

$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (t - \mathbb{E}[X])^2 \cdot f_X(t)\,\mathrm{d}t,$$

wenn $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$ existiert.

Lemma 63

Sei X eine kontinuierliche Zufallsvariable, und sei

$$Y := g(X)\,.$$

Dann gilt

$$\mathbb{E}[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot f_X(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Beweis:

Wir zeigen die Behauptung nur für den einfachen Fall, dass g eine lineare Funktion ist, also $Y := a \cdot X + b$ für $a, b \in \mathbb{R}$ und $a > 0$.

Es gilt (siehe obiges Beispiel)

$$\mathbb{E}[a \cdot X + b] = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f_Y(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f_X\left(\frac{t-b}{a}\right) \cdot \frac{1}{a}\,\mathrm{d}t.$$

Durch die Substitution $u := (t-b)/a$ mit $\mathrm{d}\,u = (1/a)\,\mathrm{d}\,t$ erhalten wir

$$\mathbb{E}[a \cdot X + b] = \int_{-\infty}^{\infty} (au + b) f_X(u)\,\mathrm{d}u.$$

$Y = x^2 + \ln x$

Lemma 63

Sei X eine kontinuierliche Zufallsvariable, und sei

$$Y := g(X).$$

Dann gilt

$$\mathbb{E}[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot f_X(t)\,\mathrm{d}t.$$

$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f_X(t)\,dt$

Beweis:

Wir zeigen die Behauptung nur für den einfachen Fall, dass g eine lineare Funktion ist, also $Y := a \cdot X + b$ für $a, b \in \mathbb{R}$ und $a > 0$.

Es gilt (siehe obiges Beispiel)

$f_X(u)$

$$\mathbb{E}[a \cdot X + b] = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f_Y(t)\,\mathrm{d}t = \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} t \cdot \boxed{f_X\left(\frac{t-b}{a}\right) \cdot \frac{1}{a}\,\mathrm{d}t}}.$$

Durch die Substitution $u := (t-b)/a$ mit $\mathrm{d}\,u = (1/a)\,\mathrm{d}\,t$ erhalten wir

$$\mathbb{E}[a \cdot X + b] = \int_{-\infty}^{\infty} (au + b) f_X(u)\,\mathrm{d}u.$$

Beispiel 64

Für Erwartungswert und Varianz der Gleichverteilung ergibt sich

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \int_a^b t \cdot \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b t \cdot \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2(b-a)} \cdot [t^2]_a^b \\
&= \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}, \\
\mathbb{E}[X^2] &= \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b t^2 \cdot \mathrm{d}t = \frac{b^2 + ba + a^2}{3}, \\
\mathrm{Var}[X] &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \ldots = \frac{(a-b)^2}{12}.
\end{aligned}$$

$Y = x^2 + \ln x$

Lemma 63

Sei X eine kontinuierliche Zufallsvariable, und sei

$$\boxed{Y := g(X)\,.}$$

Dann gilt

$$\boxed{\mathbb{E}[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot f_X(t)\, \mathrm{d}t\,.}$$

Beispiel 64

Für Erwartungswert und Varianz der Gleichverteilung ergibt sich

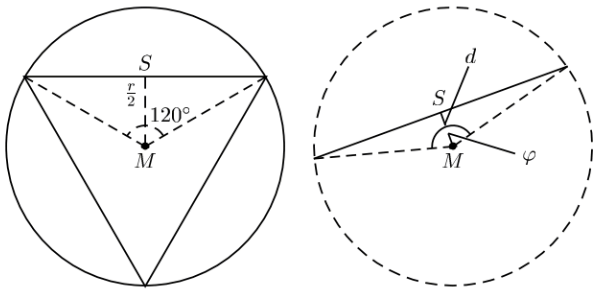
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \int_a^b t \cdot \frac{1}{b-a}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b t \cdot \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2(b-a)} \cdot [t^2]_a^b \\
&= \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}, \\
\mathbb{E}[X^2] &= \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b t^2 \cdot \mathrm{d}t = \frac{b^2 + ba + a^2}{3}, \\
\mathrm{Var}[X] &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \ldots = \frac{(a-b)^2}{12}\,.
\end{aligned}$$

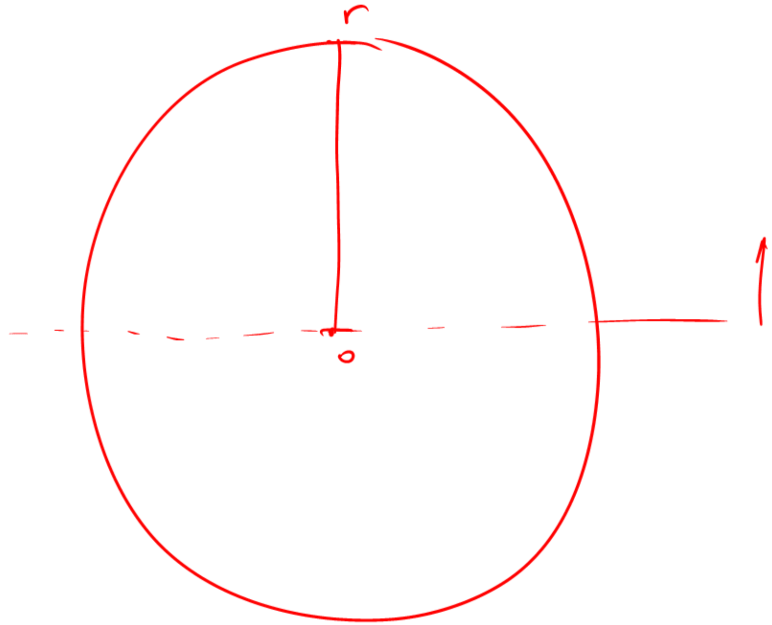
1.2.4 Laplace-Prinzip in kontinuierlichen Wahrscheinlichkeitsräumen

Das folgende Beispiel zeigt, dass im kontinuierlichen Fall die Bedeutung von „gleichwahrscheinlich“ nicht immer ganz klar sein muss.

Bertrand’sches Paradoxon

Wir betrachten einen Kreis mit einem eingeschriebenen gleichseitigen Dreieck. Was ist die Wahrscheinlichkeit, mit der die Länge einer zufällig gewählten Sehne die Seitenlänge dieses Dreiecks übersteigt (Ereignis A).





Beobachtungen:

- Die Seiten des Dreiecks haben Abstand $\frac{r}{2}$ vom Mittelpunkt M.
- Die Lage jeder Sehne ist (bis auf Rotation um M) durch einen der folgenden Parameter festgelegt:
  - Abstand d zum Kreismittelpunkt,
  - Winkel φ mit dem Kreismittelpunkt.

Wir nehmen für jeden dieser Parameter Gleichverteilung an und ermitteln $\Pr[A]$.

1. Sei $d \in [0, r]$ gleichverteilt. A tritt ein, wenn $d < \frac{r}{2}$, und es folgt $\Pr[A] = \frac{1}{2}$.
2. Sei $\varphi \in [0°, 180°]$ gleichverteilt. Für A muss gelten $\varphi \in]120°, 180°]$, und es folgt somit $\Pr[A] = \frac{1}{3}$.

1.3 Mehrere kontinuierliche Zufallsvariablen

1.3.1 Mehrdimensionale Dichten

Definition 65

Zu zwei kontinuierlichen Zufallsvariablen X, Y wird der zugrunde liegende gemeinsame Wahrscheinlichkeitsraum über $\mathbb{R}^2$ durch eine integrierbare (gemeinsame) Dichtefunktion $f_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_0^+$ mit

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1$$

beschrieben. Für ein Ereignis $A \subseteq \mathbb{R}^2$ (das aus abzählbar vielen geschlossenen oder offenen Bereichen gebildet sein muss) gilt

$$\Pr[A] = \int_A f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

$\Pr[X=x, Y=y] = \Pr[X=x] \cdot \Pr(Y=y)$

Definition 67

Zwei kontinuierliche Zufallsvariablen X und Y heißen unabhängig, wenn

$$\Pr[X \le x, Y \le y] = \Pr[X \le x] \cdot \Pr[Y \le y]$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt.

Dies ist gleichbedeutend mit

$$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)\,.$$

Differentiation ergibt

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)\,.$$

1.3 Mehrere kontinuierliche Zufallsvariablen

1.3.1 Mehrdimensionale Dichten

Definition 65

Zu zwei kontinuierlichen Zufallsvariablen X, Y wird der zugrunde liegende gemeinsame Wahrscheinlichkeitsraum über $\mathbb{R}^2$ durch eine integrierbare (gemeinsame) Dichtefunktion $f_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_0^+$ mit

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1$$

beschrieben. Für ein Ereignis $A \subseteq \mathbb{R}^2$ (das aus abzählbar vielen geschlossenen oder offenen Bereichen gebildet sein muss) gilt

$$\Pr[A] = \int_A f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$