

Script generated by TTT

Title: Esparza: DWT (10.05.2012)

Date: Thu May 10 14:16:18 CEST 2012

Duration: 90:01 min

Pages: 45

100

5.3 Mehrere Zufallsvariablen

Beispiel 21

Aus einem Skatblatt mit 32 Karten ziehen wir zufällig eine Hand von zehn Karten sowie einen Skat von zwei Karten. Unter den Karten gibt es vier Buben. Die Zufallsvariable X zählt die Anzahl der Buben in der Hand, während Y die Anzahl der Buben im Skat angibt. Die Werte von X und Y hängen offensichtlich stark voneinander ab. Beispielsweise muss $Y = 0$ sein, wenn $X = 4$ gilt.

Wie kann man mit mehreren Zufallsvariablen über demselben Wahrscheinlichkeitsraum rechnen, auch wenn sie, wie im obigen Beispiel, sehr voneinander abhängig sind?

Wir untersuchen Wahrscheinlichkeiten der Art

$$\Pr[X = x, Y = y] = \Pr[\{\omega; X(\omega) = x, Y(\omega) = y\}].$$

Beispiel 22

Wenn wir nur die Zufallsvariable X betrachten, so gilt für $0 \leq x \leq 4$

$$\Pr[X = x] = \frac{\binom{4}{x} \binom{28}{10-x}}{\binom{32}{10}}.$$

Allgemein nennt man Zufallsvariablen mit der Dichte

$$\Pr[X = x] = \frac{\binom{b}{x} \binom{a}{r-x}}{\binom{a+b}{r}}$$

hypergeometrisch verteilt. Durch diese Dichte wird ein Experiment modelliert, bei dem r Elemente ohne Zurücklegen aus einer Grundmenge der Mächtigkeit $a + b$ mit b besonders ausgezeichneten Elementen gezogen werden.

Beispiel 22 (Forts.)

Die Zufallsvariable Y ist für sich gesehen ebenfalls hypergeometrisch verteilt mit $b = 4$, $a = 28$ und $r = 2$.

Für X und Y zusammen gilt jedoch z.B.

$$\Pr[X = 4, Y = 1] = 0,$$

und allgemein

$$\Pr[X = x, Y = y] = \frac{\binom{4}{x} \binom{28}{10-x} \binom{4-y}{y} \binom{28-(10-x)}{2-y}}{\binom{32}{10} \binom{22}{2}}.$$

Bemerkung: Die Schreibweise $\Pr[X = x, Y = y]$ stellt eine Abkürzung von $\Pr[„X = x \wedge Y = y“]$ dar. Ein anderes Beispiel ist

$$\Pr[X \leq x, Y \leq y_1, \sqrt{Y} = y_2].$$

Die Funktion

$$f_{X,Y}(x,y) := \Pr[X = x, Y = y]$$

heißt **gemeinsame Dichte** der Zufallsvariablen X und Y .

Aus der gemeinsamen Dichte $f_{X,Y}$ kann man ableiten

$$f_X(x) = \sum_{y \in W_Y} f_{X,Y}(x,y) \quad \text{bzw.} \quad f_Y(y) = \sum_{x \in W_X} f_{X,Y}(x,y).$$

Die Funktionen f_X und f_Y nennt man **Randdichten**.

Die Ereignisse „ $Y = y$ “ bilden eine Partitionierung des Wahrscheinlichkeitsraumes, und es gilt daher

$$\Pr[X = x] = \sum_{y \in W_Y} \Pr[X = x, Y = y] = f_X(x).$$

Die Dichten der einzelnen Zufallsvariablen entsprechen also genau den Randdichten.

Für zwei Zufallsvariablen definiert man die **gemeinsame Verteilung**

$$\begin{aligned} F_{X,Y}(x,y) &= \Pr[X \leq x, Y \leq y] = \Pr[\{\omega; X(\omega) \leq x, Y(\omega) \leq y\}] \\ &= \sum_{x' \leq x} \sum_{y' \leq y} f_{X,Y}(x',y'). \end{aligned}$$

5.3.1 Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

Definition 23

Die Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n heißen unabhängig, wenn für alle $(x_1, \dots, x_n) \in W_{X_1} \times \dots \times W_{X_n}$ gilt

$$\Pr[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n] = \Pr[X_1 = x_1] \cdot \dots \cdot \Pr[X_n = x_n].$$

Alternativ:

$$f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdot \dots \cdot f_{X_n}(x_n).$$

Bei unabhängigen Zufallsvariablen ist also die gemeinsame Dichte gleich dem Produkt der Randdichten. Ebenso gilt

$$F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdot \dots \cdot F_{X_n}(x_n).$$

Satz 24

Seien X_1, \dots, X_n unabhängige Zufallsvariablen und S_1, \dots, S_n beliebige Mengen mit $S_i \subseteq W_{X_i}$. Dann sind die Ereignisse „ $X_1 \in S_1$ “, „ \dots “, „ $X_n \in S_n$ “ unabhängig.

Beweis:

$$\begin{aligned} &\Pr[X_1 \in S_1, \dots, X_n \in S_n] \\ &= \sum_{x_1 \in S_1} \dots \sum_{x_n \in S_n} \Pr[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n] \\ &\stackrel{\text{Unabh.}}{=} \sum_{x_1 \in S_1} \dots \sum_{x_n \in S_n} \Pr[X_1 = x_1] \cdot \dots \cdot \Pr[X_n = x_n] \\ &= \left(\sum_{x_1 \in S_1} \Pr[X_1 = x_1] \right) \cdot \dots \cdot \left(\sum_{x_n \in S_n} \Pr[X_n = x_n] \right) \\ &= \Pr[X_1 \in S_1] \cdot \dots \cdot \Pr[X_n \in S_n]. \end{aligned}$$

□

Satz 25

f_1, \dots, f_n seien reellwertige Funktionen ($f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ für $i = 1, \dots, n$). Wenn die Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n unabhängig sind, dann gilt dies auch für $f_1(X_1), \dots, f_n(X_n)$.

Beweis:

Sei $z_i \in W_{f(X_i)}$ für $i = 1, \dots, n$ und $S_i = \{x; f(x) = z_i\}$.

$$\begin{aligned} & \Pr[f_1(X_1) = z_1, \dots, f_n(X_n) = z_n] \\ &= \Pr[X_1 \in S_1, \dots, X_n \in S_n] \\ &\stackrel{\text{Unabh.}}{=} \Pr[X_1 \in S_1] \cdot \dots \cdot \Pr[X_n \in S_n] \\ &= \Pr[f_1(X_1) = z_1] \cdot \dots \cdot \Pr[f_n(X_n) = z_n]. \end{aligned}$$

□

5.3.2 Zusammengesetzte Zufallsvariablen

Beispiel 26

Ein Würfel werde zweimal geworfen. X bzw. Y bezeichne die Augenzahl im ersten bzw. zweiten Wurf. Sei $Z := X + Y$ die Summe der gewürfelten Augenzahlen.

Für Z gilt z.B.:

$$\Pr[Z = 1] = \Pr[\emptyset] = 0,$$

$$\Pr[Z = 4] = \Pr[\{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}] = \frac{3}{36}.$$

Für die Verteilung der Summe zweier **unabhängiger** Zufallsvariablen gilt der folgende Satz:

Satz 27

Für zwei **unabhängige** Zufallsvariablen X und Y sei $Z := X + Y$.

Es gilt

$$f_Z(z) = \sum_{x \in W_X} f_X(x) \cdot f_Y(z - x).$$

Für die Verteilung der Summe zweier **unabhängiger** Zufallsvariablen gilt der folgende Satz:

Satz 27

Für zwei **unabhängige** Zufallsvariablen X und Y sei $Z := X + Y$.
Es gilt

$$f_Z(z) = \sum_{x \in W_X} f_X(x) \cdot f_Y(z - x).$$

Beweis:

Mit Hilfe des Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit folgt, dass

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \Pr[Z = z] \\ &= \sum_{x \in W_X} \Pr[X + Y = z \mid X = x] \cdot \Pr[X = x] \\ &= \sum_{x \in W_X} \Pr[Y = z - x \mid X = x] \cdot \Pr[X = x] \\ \text{Unab.} & \quad \sum_{x \in W_X} \Pr[Y = z - x] \cdot \Pr[X = x] \\ &= \sum_{x \in W_X} f_X(x) \cdot f_Y(z - x). \end{aligned}$$

Den Ausdruck $\sum_{x \in W_X} f_X(x) \cdot f_Y(z - x)$ aus Satz 27 nennt man in Analogie zu den entsprechenden Begriffen bei Potenzreihen auch **Faltung** oder **Konvolution** der Dichten f_X und f_Y . □

Beispiel (Forts.)

Berechne die Dichte von $Z = X + Y$:

$$\begin{aligned} \Pr[Z = z] &= \sum_{x \in W_X} \Pr[X = x] \cdot \Pr[Y = z - x] \\ &= \sum_{x=1}^6 \frac{1}{6} \cdot \Pr[Y = z - x] = \sum_{x=\max\{1, z-6\}}^{\min\{6, z-1\}} \frac{1}{36}. \end{aligned}$$

Für $2 \leq z \leq 7$ erhalten wir

$$\Pr[Z = z] = \sum_{i=1}^{z-1} \frac{1}{36} = \frac{z-1}{36}.$$

Und für $7 < z \leq 12$:

$$\Pr[Z = z] = \frac{13-z}{36}.$$

The screenshot shows a window titled 'idf* - PDF Annotator'. The window has a menu bar with 'Datei', 'Bearbeiten', 'Werkzeug', 'Ansicht', 'Extras', 'Fenster', and 'Hilfe'. Below the menu bar is a toolbar with various icons for file operations and viewing. The main content area is currently blank. At the bottom of the screen, the Windows taskbar is visible, showing the system tray with the date '14:51' and '10.05.2012'.

5.3.3 Momente zusammengesetzter Zufallsvariablen

Satz 28 (Linearität des Erwartungswerts)

Für Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n und $X := a_1 X_1 + \dots + a_n X_n$ mit $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbb{E}[X] = a_1 \mathbb{E}[X_1] + \dots + a_n \mathbb{E}[X_n].$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \sum_{\omega \in \Omega} (a_1 \cdot X_1(\omega) + \dots + a_n \cdot X_n(\omega)) \cdot \Pr[\omega] \\ &= a_1 \cdot \left(\sum_{\omega \in \Omega} X_1(\omega) \cdot \Pr[\omega] \right) + \dots + a_n \cdot \left(\sum_{\omega \in \Omega} X_n(\omega) \cdot \Pr[\omega] \right) \\ &= a_1 \cdot \mathbb{E}[X_1] + \dots + a_n \cdot \mathbb{E}[X_n]. \end{aligned}$$

Win

□

5.3.3 Momente zusammengesetzter Zufallsvariablen

Satz 28 (Linearität des Erwartungswerts)

Für Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n und $X := a_1 X_1 + \dots + a_n X_n$ mit $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbb{E}[X] = a_1 \mathbb{E}[X_1] + \dots + a_n \mathbb{E}[X_n].$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \sum_{\omega \in \Omega} (a_1 \cdot X_1(\omega) + \dots + a_n \cdot X_n(\omega)) \cdot \Pr[\omega] \\ &= a_1 \cdot \left(\sum_{\omega \in \Omega} X_1(\omega) \cdot \Pr[\omega] \right) + \dots + a_n \cdot \left(\sum_{\omega \in \Omega} X_n(\omega) \cdot \Pr[\omega] \right) \\ &= a_1 \cdot \mathbb{E}[X_1] + \dots + a_n \cdot \mathbb{E}[X_n]. \end{aligned}$$

□

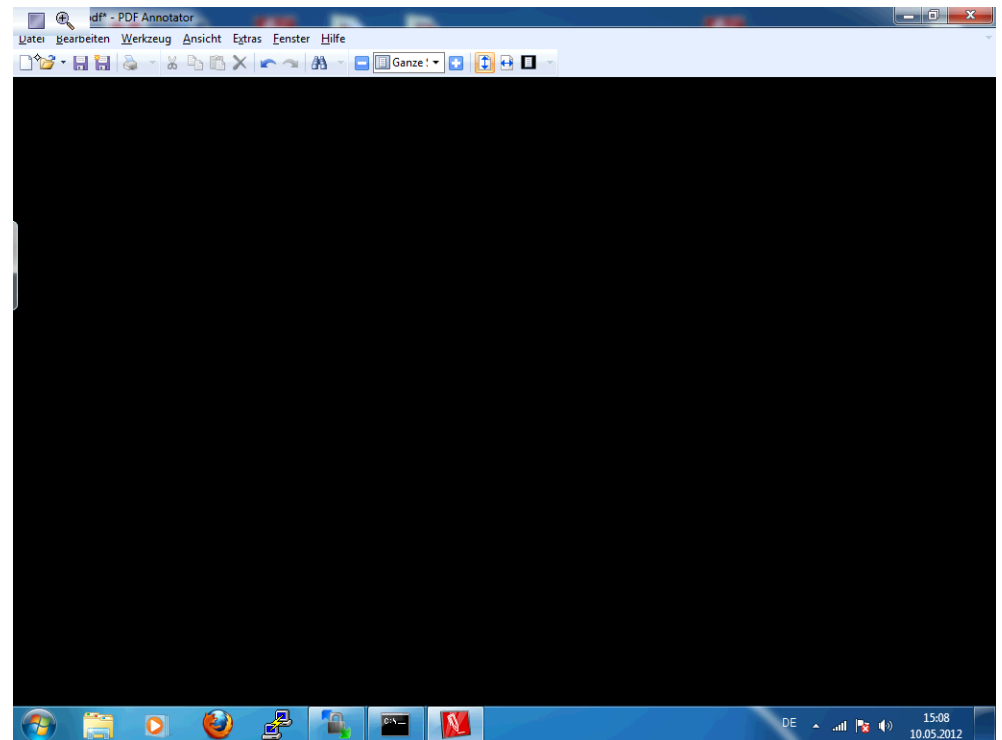
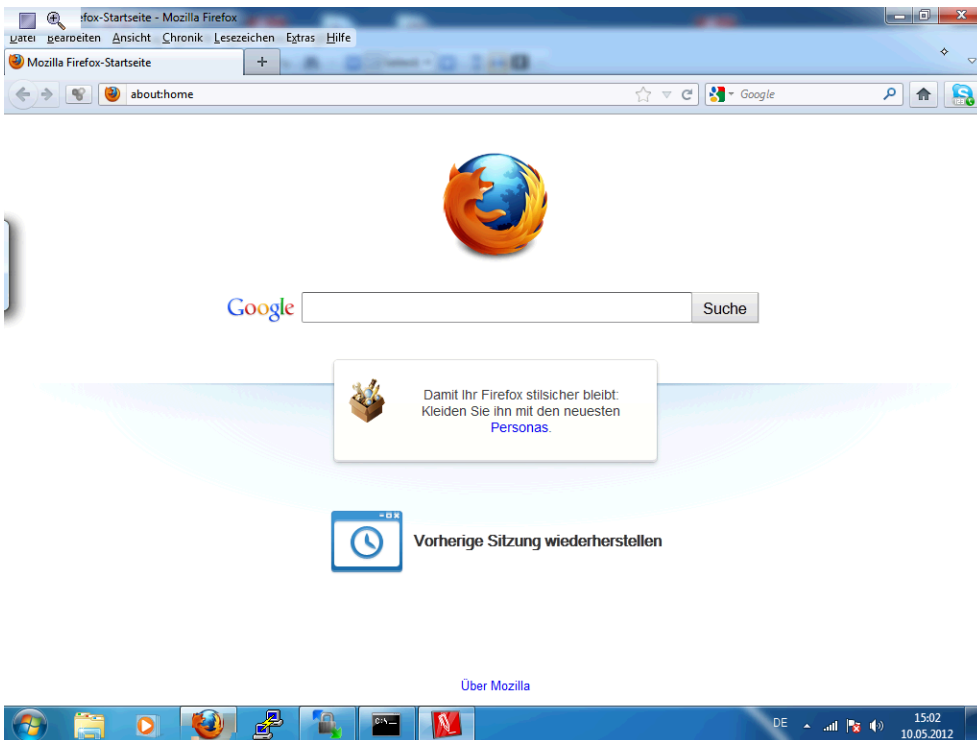
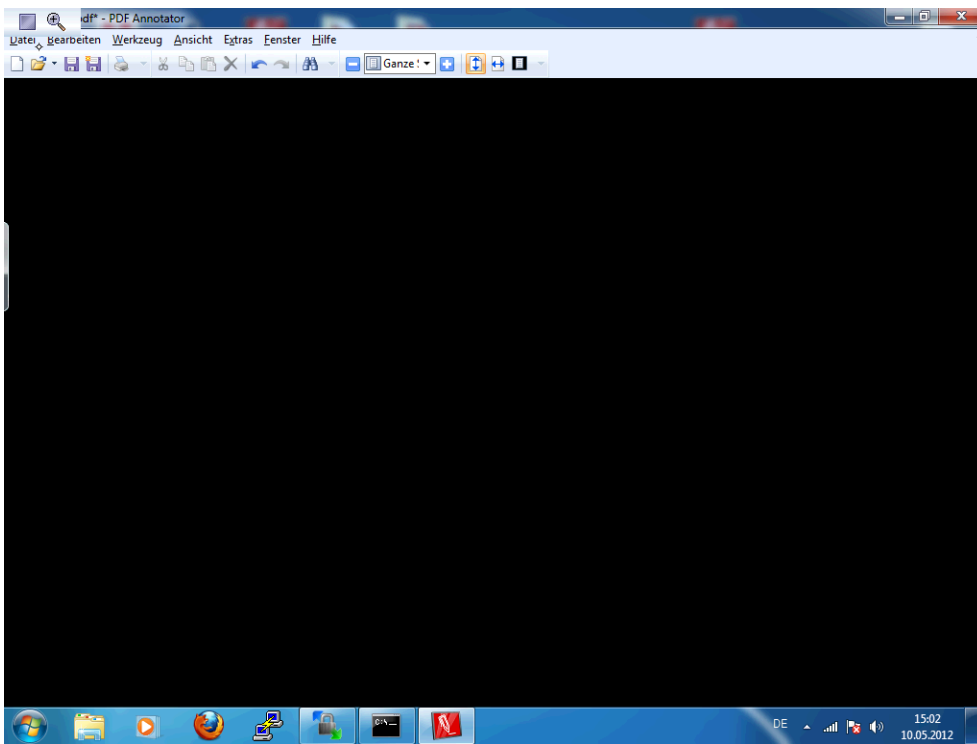
Beispiel 29

n betrunkene Seeleute torkeln nach dem Landgang in ihre Kojen. Sie haben völlig die Orientierung verloren, weshalb wir annehmen, dass jede Zuordnung der Seeleute zu den n Betten gleich wahrscheinlich ist (genau ein Seemann pro Bett). Wie viele Seeleute liegen im Mittel im richtigen Bett?

Die Anzahl der Seeleute im richtigen Bett zählen wir mit der Zufallsvariablen X , die als Summe der Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n dargestellt wird, wobei

$$X_i := \begin{cases} 1 & \text{falls Seemann } i \text{ in seinem Bett liegt,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Offenbar gilt $X := X_1 + \dots + X_n$.



Prompt

```

Nr: 000812 987631 'ÖÖn Bed: '0' AVerAverage: 1,00
Nr: 000813 987631 Own bed: 0 AVerAverage: 1,00
Nr: 362814 987631542 Own bed: 0 Average: 1,00
Nr: 362815 987632145 Own bed: 0 Average: 1,00
Nr: 362816 987632154 Own bed: 0 Average: 1,00
Nr: 362817 987632415 Own bed: 0 Average: 1,00
Nr: 362818 987632451 Own bed: 0 Average: 1,00
Nr: 362819 987632514 Own bed: 0 Average: 1,00
Nr: 000820 987632 'ÖÖn Bed: '0' AVerAverage: 1,00
Nr: 000821 987632 Own bed: 1 AVerAverage: 1,00
Nr: 362822 987634152 Own bed: 0 Average: 1,00
Nr: 362823 987634215 Own bed: 0 Average: 1,00
Nr: 362824 987634251 Own bed: 0 Average: 1,00
Nr: 362825 987634512 Own bed: 0 Average: 1,00
Nr: 362826 987634521 Own bed: 0 Average: 1,00
Nr: 362827 987635124 Own bed: 0 Average: 1,00
Nr: 000829 987635 'ÖÖn Bed: '0' AVerAverage: 1,00
Nr: 000830 987635 Own bed: 0 AVerAverage: 1,00
Nr: 362830 987635241 Own bed: 0 Average: 1,00
Nr: 362831 987635412 Own bed: 0 Average: 1,00
Nr: 362832 987635421 Own bed: 0 Average: 1,00
Nr: 362833 987635235 Own bed: 0 Average: 1,00
Nr: 362834 987641253 Own bed: 0 Average: 1,00
Nr: 362835 987641325 Own bed: 0 Average: 1,00
Nr: 000827 987635 'ÖÖn Bed: '0' AVerAverage: 1,00
Nr: 000828 987635 Own bed: 0 AVerAverage: 1,00
Nr: 362838 987641532 Own bed: 0 Average: 1,00
Nr: 362839 987642135 Own bed: 0 Average: 1,00
Nr: 362840 987642153 Own bed: 0 Average: 1,00
Nr: 362841 987642315 Own bed: 0 Average: 1,00
Nr: 362842 987642351 Own bed: 0 Average: 1,00
Nr: 362843 987642513 Own bed: 0 Average: 1,00
Nr: 362848 987643251 Own bed: 0 Average: 1,00
Nr: 362849 987643512 Own bed: 0 Average: 1,00

```

Esc q w e r t z
 Tab q w e r t z
 Feststell a s d f g h
 Umsch < y x c v b
 Strg # Alt

idf* - PDF Annotator

2012-dwt.pdf*

Stift

$\frac{1}{6} (1, 2, 3) \mapsto 3 -$
 $\frac{1}{6} (1, 3, 2) \mapsto 1 - E[X_3] = 1$
 $\frac{1}{6} (2, 1, 3) \mapsto 1 -$
 $\frac{1}{6} (2, 3, 1) \mapsto 0 -$
 $\frac{1}{6} (3, 1, 2) \mapsto 0 -$

$Pr[X=0]$
 $Pr[X=1]$

$\sum_{x \in W_X}$

Beispiel 29

n betrunkene Seeleute torkeln nach dem Landgang in ihre Kojen. Sie haben völlig die Orientierung verloren, weshalb wir annehmen, dass jede Zuordnung der Seeleute zu den n Betten gleich wahrscheinlich ist (genau ein Seemann pro Bett). Wie viele Seeleute liegen im Mittel im richtigen Bett?

Die Anzahl der Seeleute im richtigen Bett zählen wir mit der Zufallsvariablen X , die als Summe der Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n dargestellt wird, wobei

$$X_i := \begin{cases} 1 & \text{falls Seemann } i \text{ in seinem Bett liegt,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Offenbar gilt $X := X_1 + \dots + X_n$.

Beispiel 29

Für die Variablen X_i erhalten wir $\Pr[X_i = 1] = \frac{1}{n}$, da jedes Bett von Seemann i mit gleicher Wahrscheinlichkeit aufgesucht wird.

Daraus folgt

$$\mathbb{E}[X_i] = 0 \cdot \Pr[X_i = 0] + 1 \cdot \Pr[X_i = 1] = \frac{1}{n},$$

und somit

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i] = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} = 1.$$

Im Mittel hat also nur ein Seemann sein eigenes Bett aufgesucht.

Satz 30 (Multiplikativität des Erwartungswerts)

Für *unabhängige* Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n gilt

$$\mathbb{E}[X_1 \cdot \dots \cdot X_n] = \mathbb{E}[X_1] \cdot \dots \cdot \mathbb{E}[X_n].$$

Beweis:

Wir beweisen den Fall $n = 2$. Der allgemeine Fall ist analog.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X \cdot Y] &= \sum_{x \in W_X} \sum_{y \in W_Y} xy \cdot \Pr[X = x, Y = y] \\ &\stackrel{\text{Unabh.}}{=} \sum_{x \in W_X} \sum_{y \in W_Y} xy \cdot \Pr[X = x] \cdot \Pr[Y = y] \\ &= \sum_{x \in W_X} x \cdot \Pr[X = x] \sum_{y \in W_Y} y \cdot \Pr[Y = y] \\ &= \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]. \end{aligned}$$

□

Dass für die Gültigkeit von Satz 30 die Unabhängigkeit der Zufallsvariablen wirklich notwendig ist, sieht man beispielsweise am Fall $Y = -X$ für eine Zufallsvariable mit einer von Null verschiedenen Varianz. Dann gilt

$$\mathbb{E}[X \cdot Y] = -\mathbb{E}[X^2] \neq -(\mathbb{E}[X])^2 = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y].$$

Satz 31 (Additivität der Varianz)

Für *unabhängige* Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n und $X := X_1 + \dots + X_n$ gilt

$$\text{Var}[X] = \text{Var}[X_1] + \dots + \text{Var}[X_n].$$

Beweis:

Wir betrachten nur den Fall $n = 2$ mit den Zufallsvariablen X und Y .

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(X + Y)^2] &= \mathbb{E}[X^2 + 2XY + Y^2] = \mathbb{E}[X^2] + 2\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] + \mathbb{E}[Y^2] \\ \mathbb{E}[X + Y]^2 &= (\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y])^2 = \mathbb{E}[X]^2 + 2\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] + \mathbb{E}[Y]^2 \end{aligned}$$

Wir ziehen die zweite Gleichung von der ersten ab und erhalten $\mathbb{E}[(X + Y)^2] - \mathbb{E}[X + Y]^2 = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 + \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2$. Mit Hilfe von Satz 17 folgt die Behauptung. □

Für abhängige Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n gilt Satz 31 im Allgemeinen nicht. Als Beispiel funktioniert wiederum der Fall $X = -Y$:

$$\text{Var}[X + Y] = 0 \neq 2 \cdot \text{Var}[X] = \text{Var}[X] + \text{Var}[Y].$$

Definition 32

Zu einem Ereignis A heißt die Zufallsvariable

$$I_A := \begin{cases} 1 & \text{falls } A \text{ eintritt,} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Indikatorvariable des Ereignisses A .

Beobachtung:

Für die Indikatorvariable I_A gilt nach Definition

$$\mathbb{E}[I_A] = 1 \cdot \Pr[A] + 0 \cdot \Pr[\bar{A}] = \Pr[A].$$

Ebenso gilt

$$\mathbb{E}[I_{A_1} \cdot \dots \cdot I_{A_n}] = \Pr[A_1 \cap \dots \cap A_n],$$

da das Produkt von Indikatorvariablen genau dann gleich 1 ist, wenn alle entsprechenden Ereignisse eintreten.

Beispiel (Forts.)

Wir betrachten wieder das Beispiel der total betrunkenen Matrosen.

Sei A_i das Ereignis, dass der i -te Seemann im richtigen Bett liegt. Mit der Notation der Indikatorvariablen sei $X_i = I_{A_i}$. Dann gilt für beliebige $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$:

$$\mathbb{E}[X_i X_j] = \mathbb{E}[I_{A_i} I_{A_j}] = \Pr[A_i \cap A_j] = \frac{1}{n(n-1)},$$

sowie

$$\mathbb{E}[X_i^2] = 0^2 \cdot \Pr[\bar{A}_i] + 1^2 \cdot \Pr[A_i] = \Pr[A_i] = 1/n.$$

Beispiel (Forts.)

Daraus folgt wegen der Linearität des Erwartungswerts für $X = X_1 + \dots + X_n$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X^2] &= \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n X_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} X_i X_j \right] \\ &= n \cdot \frac{1}{n} + n(n-1) \cdot \frac{1}{n(n-1)} = 2. \end{aligned}$$

Für die Varianz erhalten wir somit den Wert

$$\text{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = 2 - 1 = 1.$$

Beispiel (Forts.)

Wir betrachten wieder das Beispiel der total betrunkenen Matrosen.

Sei A_i das Ereignis, dass der i -te Seemann im richtigen Bett liegt. Mit der Notation der Indikatorvariablen sei $X_i = I_{A_i}$. Dann gilt für beliebige $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$:

$$\mathbb{E}[X_i X_j] = \mathbb{E}[I_{A_i} I_{A_j}] = \Pr[A_i \cap A_j] = \frac{1}{n(n-1)},$$

sowie

$$\mathbb{E}[X_i^2] = 0^2 \cdot \Pr[\bar{A}_i] + 1^2 \cdot \Pr[A_i] = \Pr[A_i] = 1/n.$$

Beispiel (Forts.)

Daraus folgt wegen der Linearität des Erwartungswerts für $X = X_1 + \dots + X_n$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X^2] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n X_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} X_i X_j\right] \\ &= n \cdot \frac{1}{n} + n(n-1) \cdot \frac{1}{n(n-1)} = 2. \end{aligned}$$

Für die Varianz erhalten wir somit den Wert

$$\text{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = 2 - 1 = 1.$$

Einfacher Beweis für Satz 12 mit Hilfe von Indikatorvariablen:

Zur Erinnerung:

Satz 12 (Siebformel, Prinzip der Inklusion/Exklusion)

Für Ereignisse A_1, \dots, A_n ($n \geq 2$) gilt:

$$\begin{aligned} \Pr\left[\bigcup_{i=1}^n A_i\right] &= \sum_{i=1}^n \Pr[A_i] - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \Pr[A_{i_1} \cap A_{i_2}] + \dots \\ &\quad + (-1)^{l-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_l \leq n} \Pr[A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_l}] + \dots \\ &\quad + (-1)^{n-1} \cdot \Pr[A_1 \cap \dots \cap A_n]. \end{aligned}$$

Beweis:

Zur Erinnerung: Zu Ereignissen A_1, \dots, A_n wollen wir die Wahrscheinlichkeit $\Pr[B]$ des Ereignisses $B := A_1 \cup \dots \cup A_n$ ermitteln.

Wir betrachten die Indikatorvariablen $I_i := I_{A_i}$ der Ereignisse A_1, \dots, A_n und die Indikatorvariable $I_{\bar{B}}$ des Ereignisses \bar{B} .

Das Produkt $\prod_{i=1}^n (1 - I_i)$ ist genau dann gleich 1, wenn $I_1 = \dots = I_n = 0$, d.h. wenn B nicht eintritt. Somit gilt $I_{\bar{B}} = \prod_{i=1}^n (1 - I_i)$ und wir erhalten:

$$I_{\bar{B}} = 1 - \sum_{1 \leq i \leq n} I_i + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} I_{i_1} I_{i_2} - \dots + (-1)^n I_1 \cdot \dots \cdot I_n.$$

Beweis:

Zur Erinnerung: Zu Ereignissen A_1, \dots, A_n wollen wir die Wahrscheinlichkeit $\Pr[B]$ des Ereignisses $B := A_1 \cup \dots \cup A_n$ ermitteln.

Wir betrachten die Indikatorvariablen $I_i := I_{A_i}$ der Ereignisse A_1, \dots, A_n und die Indikatorvariable $I_{\bar{B}}$ des Ereignisses \bar{B} .

Das Produkt $\prod_{i=1}^n (1 - I_i)$ ist genau dann gleich 1, wenn $I_1 = \dots = I_n = 0$, d.h. wenn B nicht eintritt. Somit gilt $I_{\bar{B}} = \prod_{i=1}^n (1 - I_i)$ und wir erhalten:

$$I_{\bar{B}} = 1 - \sum_{1 \leq i \leq n} I_i + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} I_{i_1} I_{i_2} - \dots + (-1)^n I_1 \cdot \dots \cdot I_n.$$

$I_{\bar{B}}$
 $I_{\bar{B}}$