

Script generated by TTT

Title: Esparza: DWT (08.05.2012)

Date: Tue May 08 14:16:25 CEST 2012

Duration: 82:03 min

Pages: 37

5.2 Erwartungswert und Varianz

Definition 5

Zu einer Zufallsvariablen X definieren wir den **Erwartungswert** $\mathbb{E}[X]$ durch

$$\mathbb{E}[X] := \sum_{x \in W_X} x \cdot \Pr[X = x] = \sum_{x \in W_X} x \cdot f_X(x),$$

sofern $\sum_{x \in W_X} |x| \cdot \Pr[X = x]$ konvergiert.

Beispiel 6

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y] &= \sum_{i=0}^3 i \cdot \Pr[Y = i] \\ &= 1 \cdot \Pr[Y = 1] + 2 \cdot \Pr[Y = 2] + 3 \cdot \Pr[Y = 3] \\ &= 1 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1+2+3}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Berechnung des Erwartungswerts:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \sum_{x \in W_X} x \cdot \Pr[X = x] = \sum_{x \in W_X} x \cdot f_X(x) \\ &= \sum_{x \in W_X} x \cdot \sum_{\omega \in \Omega: X(\omega)=x} \Pr[\omega] \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot \Pr[\omega]. \end{aligned}$$

Bei unendlichen Wahrscheinlichkeitsräumen ist dabei analog zur Definition des Erwartungswerts erforderlich, dass $\sum_{\omega \in \Omega} |X(\omega)| \cdot \Pr[\omega]$ konvergiert (**absolute** Konvergenz).

Satz 9 (Linearität des Erwartungswerts, einfache Version)

Für eine beliebige Zufallsvariable X und $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbb{E}[a \cdot X + b] = a \cdot \mathbb{E}[X] + b.$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[a \cdot X + b] &= \sum_{x \in W_X} (a \cdot x + b) \cdot \Pr[X = x] \\ &= a \cdot \sum_{x \in W_X} x \cdot \Pr[X = x] + b \cdot \sum_{x \in W_X} \Pr[X = x] \\ &= a \cdot \mathbb{E}[X] + b. \end{aligned}$$

□

Satz 9 (Linearität des Erwartungswerts, einfache Version)

Für eine beliebige Zufallsvariable X und $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbb{E}[a \cdot X + b] = a \cdot \mathbb{E}[X] + b.$$

Ω

Beweis:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[a \cdot X + b] &= \sum_{x \in W_X} (a \cdot x + b) \cdot \Pr[X = x] \\ &= a \cdot \sum_{x \in W_X} x \cdot \Pr[X = x] + b \cdot \sum_{x \in W_X} \Pr[X = x] \\ &= a \cdot \mathbb{E}[X] + b.\end{aligned}$$

□

Satz 10

Sei X eine Zufallsvariable mit $W_X \subseteq \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr[X \geq i].$$

Beweis:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \Pr[X = i] = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^i \Pr[X = i] \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=j}^{\infty} \Pr[X = i] = \sum_{j=1}^{\infty} \Pr[X \geq j].\end{aligned}$$

□

Beispiel 11

(siehe auch den Abschnitt "Mehrere Zufallsvariablen")

Zwei faire Würfel werden geworfen. Der Spieler gewinnt k Euro, wobei k die kleinere der zwei Augenzahlen ist. Wieviel Euro gewinnt der Spieler in Durchschnitt?

$$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (6, 6)\}$$

Wir definieren zwei Zufallsvariablen $X_1, X_2: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$:

$$X_1((a, b)) := a \quad X_2((a, b)) := b$$

Wir müssen $\mathbb{E}(\min\{X_1, X_2\})$ berechnen.

7

Beispiel 11 (Forts.)

Wir verwenden Satz 10.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\min\{X_1, X_2\}) &= \sum_{k \geq 1} \Pr[\min\{X_1, X_2\} \geq k] \\ &= \sum_{k \geq 1} \Pr[„X_1 \geq k“ \cap „X_2 \geq k“] \\ &\stackrel{\text{Unabh.}}{=} \sum_{k \geq 1} \Pr[X_1 \geq k] \cdot \Pr[X_2 \geq k] \\ &= \sum_{k \geq 1} (\Pr[X_1 \geq k])^2 \\ &= \sum_{k=1}^6 \left(\frac{7-k}{6}\right)^2 \\ &= \frac{91}{36} \approx 2.528\end{aligned}$$

7

Definition 12

Sei X eine Zufallsvariable und A ein Ereignis mit $\Pr[A] > 0$. Die bedingte Zufallsvariable $X|A$ besitzt die Dichte

$$f_{X|A}(x) := \Pr[X = x | A] = \frac{\Pr[„X = x“ \cap A]}{\Pr[A]}.$$

Die Definition von $f_{X|A}$ ist zulässig, da

$$\sum_{x \in W_X} f_{X|A}(x) = \sum_{x \in W_X} \frac{\Pr[„X = x“ \cap A]}{\Pr[A]} = \frac{\Pr[A]}{\Pr[A]} = 1.$$

Der Erwartungswert $\mathbb{E}[X|A]$ der Zufallsvariablen $X|A$ berechnet sich entsprechend:

$$\mathbb{E}[X|A] = \sum_{x \in W_X} x \cdot f_{X|A}(x).$$

Satz 13

Sei X eine Zufallsvariable. Für paarweise disjunkte Ereignisse A_1, \dots, A_n mit $A_1 \cup \dots \cup A_n = \Omega$ und $\Pr[A_1], \dots, \Pr[A_n] > 0$ gilt

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X|A_i] \cdot \Pr[A_i].$$

Für paarweise disjunkte Ereignisse A_1, A_2, \dots mit $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$ und $\Pr[A_1], \Pr[A_2], \dots > 0$ gilt analog

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}[X|A_i] \cdot \Pr[A_i],$$

sofern die Erwartungswerte auf der rechten Seite alle existieren und die Summe $\sum_{i=1}^{\infty} |\mathbb{E}[X|A_i]| \cdot \Pr[A_i]$ konvergiert.

Beweis:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \sum_{x \in W_X} x \cdot \Pr[X = x] = \sum_{x \in W_X} x \cdot \sum_{i=1}^n \Pr[X = x|A_i] \cdot \Pr[A_i] \\ &= \sum_{i=1}^n \Pr[A_i] \sum_{x \in W_X} x \cdot \Pr[X = x|A_i] = \sum_{i=1}^n \Pr[A_i] \cdot \mathbb{E}[X|A_i]. \end{aligned}$$

Der Beweis für den unendlichen Fall verläuft analog. \square

Beispiel 14

Wir werfen eine Münze so lange, bis zum ersten Mal „Kopf“ erscheint. Dies geschehe in jedem Wurf unabhängig mit Wahrscheinlichkeit p . Wir definieren dazu die Zufallsvariable $X :=$ „Anzahl der Würfe“. Wir haben bereits gesehen, dass

$$\Pr[X = k] = p(1-p)^{k-1}$$

und damit

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p(1-p)^{k-1} = p \cdot \frac{1}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p}.$$

Beispiel 14

Andere Berechnungsmethode: (gestützt auf Satz 13)

Definiere das Ereignis

$$K_1 := \text{„Im ersten Wurf fällt Kopf“}.$$

Offensichtlich gilt $\mathbb{E}[X|K_1] = 1$.

Nehmen wir nun an, dass im ersten Wurf *nicht* „Kopf“ gefallen ist. Wir starten das Experiment neu.

$$p = \frac{1}{2} \quad \begin{array}{l} \frac{1}{2} \quad k \\ \frac{1}{4} \quad zk \\ \frac{1}{8} \quad zzb \end{array}$$

Beispiel 14

Wir werfen eine Münze so lange, bis zum ersten Mal „Kopf“ erscheint. Dies geschehe in jedem Wurf unabhängig mit Wahrscheinlichkeit p . Wir definieren dazu die Zufallsvariable $X :=$ „Anzahl der Würfe“. Wir haben bereits gesehen, dass

$$\Pr[X = k] = p(1-p)^{k-1}$$

und damit

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{\infty} k p(1-p)^{k-1} = p \cdot \frac{1}{(1 - (1-p))^2} = \frac{1}{p}$$

Beispiel 14

Wir werfen eine Münze so lange, bis zum ersten Mal „Kopf“ erscheint. Dies geschehe in jedem Wurf unabhängig mit Wahrscheinlichkeit p . Wir definieren dazu die Zufallsvariable $X :=$ „Anzahl der Würfe“. Wir haben bereits gesehen, dass

$$\Pr[X = k] = p(1-p)^{k-1}$$

und damit

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{\infty} k p(1-p)^{k-1} = p \cdot \frac{1}{(1 - (1-p))^2} = \frac{1}{p}$$

$$p(1-p)^{k-1} \quad p = \frac{1}{2} \quad \begin{array}{l} \frac{1}{2} \quad k \\ \frac{1}{4} \quad zk \\ \frac{1}{8} \quad zzb \end{array}$$

Beispiel 14

Andere Berechnungsmethode: (gestützt auf Satz 13)

Definiere das Ereignis

$$K_1 := \text{„Im ersten Wurf fällt Kopf“}.$$

Offensichtlich gilt $\mathbb{E}[X|K_1] = 1$.

Nehmen wir nun an, dass im ersten Wurf *nicht* „Kopf“ gefallen ist. Wir starten das Experiment neu.

Beispiel 14

Andere Berechnungsmethode: (gestützt auf Satz 13)

Definiere das Ereignis

$$K_1 := \text{„Im ersten Wurf fällt Kopf“}.$$

Offensichtlich gilt $\mathbb{E}[X|K_1] = 1$.

Nehmen wir nun an, dass im ersten Wurf *nicht* „Kopf“ gefallen ist. Wir starten das Experiment neu.

Beispiel 14

Sei X' die Anzahl der Würfe bis zum ersten Auftreten von „Kopf“ im neu gestarteten Experiment. Wegen der Gleichheit der Experimente gilt $\mathbb{E}[X'] = \mathbb{E}[X]$. Damit schließen wir

$$\mathbb{E}[X|\bar{K}_1] = 1 + \mathbb{E}[X'] = 1 + \mathbb{E}[X]$$

und erhalten mit Satz 22:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \mathbb{E}[X|K_1] \cdot \Pr[K_1] + \mathbb{E}[X|\bar{K}_1] \cdot \Pr[\bar{K}_1] \\ &= 1 \cdot p + (1 + \mathbb{E}[X]) \cdot (1 - p).\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich wiederum $\mathbb{E}[X] = 1/p$.

Beispiel 14

Formale Ableitung von $\mathbb{E}[X|\bar{K}_1] = 1 + \mathbb{E}[X]$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X|\bar{K}_1] &= \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{\Pr[X = n \cap \bar{K}_1]}{\Pr[\bar{K}_1]} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot \frac{\Pr[z^{n-1}k]}{\Pr[\bar{K}_1]} = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \cdot \frac{\Pr[z^n k]}{\Pr[\bar{K}_1]} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \cdot \frac{\Pr[\bar{K}_1] \Pr[z^{n-1}k]}{\Pr[\bar{K}_1]} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \cdot \Pr[z^{n-1}k] = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \Pr[z^{n-1}k] + \sum_{n=1}^{\infty} \Pr[z^{n-1}k] \\ &= \mathbb{E}[X] + 1\end{aligned}$$

Beispiel 15

Wenn man eine Sechs wirft dann darf man bei Mensch-ärgere-dich-nicht bekanntermassen nochmal werfen. In Spanien gilt jedoch noch folgende Regel: wirft man dreimal hintereinander eine Sechs, muss man den Stein, den man zuletzt gezogen hat, zurück zum Startpunkt bringen.

Wie oft muss man einen fairen Würfel im Mittel werfen, um dreimal **hintereinander** eine Sechs zu würfeln?

Beispiel 15 (Forts.)

Mit Satz 13 gilt

$$E[X] = E[X | \bar{6}] \cdot \Pr[\bar{6}] + E[X | \overline{66}] \cdot \Pr[\overline{66}] \\ + E[X | \overline{666}] \cdot \Pr[\overline{666}] + E[X | 666] \cdot \Pr[666]$$

Es gilt (warum?)

$$E[X | \bar{6}] = 1 + E[X] \\ E[X | \overline{66}] = 2 + E[X] \\ E[X | \overline{666}] = 3 + E[X] \\ E[X | 666] = 3$$

und damit

$$E[X] = \frac{5}{6}(1 + E[X]) + \frac{5}{36}(2 + E[X]) + \frac{5}{216}(3 + E[X]) + \frac{3}{216}$$

mit Lösung $E[X] = 258$.

5.2.2 Varianz

Wir betrachten die beiden folgenden Zufallsexperimente:

- 1 Wir würfeln (mit einem fairen Würfel), bei **gerader** Augenzahl erhalten wir 1 Euro, bei **ungerader** Augenzahl müssen wir 1 Euro bezahlen.
- 2 Wir würfeln (mit einem fairen Würfel), bei 6 Augen erhalten wir 5 Euro, ansonsten müssen wir 1 Euro bezahlen.

Beobachtung:

In beiden Fällen ist der erwartete Gewinn = 0.

Dennoch sind die „Schwankungen“ im ersten Fall geringer als im zweiten.

Eine nahe liegende Lösung wäre,

$$\mathbb{E}[|X - \mu|]$$

zu berechnen, wobei $\mu = \mathbb{E}[X]$ sei. Dies scheitert jedoch meist an der „unhandlichen“ Betragsfunktion. Aus diesem Grund betrachtet man stattdessen $\mathbb{E}[(X - \mu)^2]$, also die quadratische Abweichung vom Erwartungswert.

Definition 16

Für eine Zufallsvariable X mit $\mu = \mathbb{E}[X]$ definieren wir die *Varianz* $\text{Var}[X]$ durch

$$\text{Var}[X] := \mathbb{E}[(X - \mu)^2] = \sum_{x \in W_X} (x - \mu)^2 \cdot \Pr[X = x].$$

Die Größe $\sigma := \sqrt{\text{Var}[X]}$ heißt *Standardabweichung* von X .

Eine nahe liegende Lösung wäre,

$$\mathbb{E}[|X - \mu|]$$

$$\mu = \mathbb{E}[X]$$
$$\mathbb{E}[Y - \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[Y]]$$

zu berechnen, wobei $\mu = \mathbb{E}[X]$ sei. Dies scheitert jedoch meist an der „unhandlichen“ Betragsfunktion. Aus diesem Grund betrachtet man stattdessen $\mathbb{E}[(X - \mu)^2]$, also die quadratische Abweichung vom Erwartungswert.

Definition 16

Für eine Zufallsvariable X mit $\mu = \mathbb{E}[X]$ definieren wir die *Varianz* $\text{Var}[X]$ durch

$$\text{Var}[X] := \mathbb{E}[(X - \mu)^2] = \sum_{x \in W_X} (x - \mu)^2 \cdot \Pr[X = x].$$

Die Größe $\sigma := \sqrt{\text{Var}[X]}$ heißt *Standardabweichung* von X .

Eine nahe liegende Lösung wäre,

$$\mathbb{E}[|X - \mu|]$$

$$\mu = \mathbb{E}[X]$$
$$\mathbb{E}[Y - \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[Y]]$$

zu berechnen, wobei $\mu = \mathbb{E}[X]$ sei. Dies scheitert jedoch meist an der „unhandlichen“ Betragsfunktion. Aus diesem Grund betrachtet man stattdessen $\mathbb{E}[(X - \mu)^2]$, also die quadratische Abweichung vom Erwartungswert.

Definition 16

Für eine Zufallsvariable X mit $\mu = \mathbb{E}[X]$ definieren wir die *Varianz* $\text{Var}[X]$ durch

$$\text{Var}[X] := \mathbb{E}[(X - \mu)^2] = \sum_{x \in W_X} (x - \mu)^2 \cdot \Pr[X = x].$$

Die Größe $\sigma := \sqrt{\text{Var}[X]}$ heißt *Standardabweichung* von X .

Satz 17

Für eine beliebige Zufallsvariable X gilt

$$\text{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2.$$

Beweis:

Sei $\mu := \mathbb{E}[X]$. Nach Definition gilt

$$\begin{aligned} \text{Var}[X] &= \mathbb{E}[(X - \mu)^2] = \mathbb{E}[X^2 - 2\mu \cdot X + \mu^2] \\ &= \mathbb{E}[X^2] - 2\mu \cdot \mathbb{E}[X] + \mu^2 \\ &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2. \end{aligned}$$

□

Beispiel 18

- 1 Wir würfeln (mit einem fairen Würfel), bei **gerader** Augenzahl erhalten wir 1 Euro, bei **ungerader** Augenzahl müssen wir 1 Euro bezahlen. Es ist

$$\mu = 0 \text{ und } \text{Var}[X] = \frac{1}{2} \cdot 1^2 + \frac{1}{2} \cdot (-1)^2 = 1.$$

- 2 Wir würfeln (mit einem fairen Würfel), bei 6 Augen erhalten wir 5 Euro, ansonsten müssen wir 1 Euro bezahlen.

Es ist

$$\mu = 0 \text{ und } \text{Var}[X] = \frac{1}{6} \cdot 5^2 + \frac{5}{6} \cdot (-1)^2 = 5.$$

Beispiel 18

- ① Wir würfeln (mit einem fairen Würfel), bei **gerader** Augenzahl erhalten wir 1 Euro, bei **ungerader** Augenzahl müssen wir 1 Euro bezahlen. Es ist

$$\mu = 0 \text{ und } \text{Var}[X] = \frac{1}{2} \cdot 1^2 + \frac{1}{2} \cdot (-1)^2 = 1.$$

- ② Wir würfeln (mit einem fairen Würfel), bei 6 Augen erhalten wir 5 Euro, ansonsten müssen wir 1 Euro bezahlen. Es ist

$$\mu = 0 \text{ und } \text{Var}[X] = \frac{1}{6} \cdot 5^2 + \frac{5}{6} \cdot (-1)^2 = 5.$$

Satz 19

Für eine beliebige Zufallsvariable X und $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$\text{Var}[a \cdot X + b] = a^2 \cdot \text{Var}[X].$$

Beweis:

Aus der in Satz 9 gezeigten Linearität des Erwartungswerts folgt $\mathbb{E}[X + b] = \mathbb{E}[X] + b$.

Zusammen mit der Definition der Varianz ergibt sich damit sofort

$$\text{Var}[X + b] = \mathbb{E}[(X + b - \mathbb{E}[X + b])^2] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \text{Var}[X].$$

Weiter folgt mit Satz 17:

$$\text{Var}[a \cdot X] = \mathbb{E}[(aX)^2] - \mathbb{E}[aX]^2 = a^2 \mathbb{E}[X^2] - (a\mathbb{E}[X])^2 = a^2 \cdot \text{Var}[X],$$

und daraus zusammen die Behauptung. \square

$$\mathbb{E}[aX + b] = a \mathbb{E}[X] + b$$

$$\text{Var}[X]$$

Satz 19

Für eine beliebige Zufallsvariable X und $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$\text{Var}[a \cdot X + b] = a^2 \cdot \text{Var}[X].$$

$$\text{Var}[X + c]$$

$$aX$$
$$aX + b$$

Der Erwartungswert und die Varianz gehören zu den so genannten **Momenten** einer Zufallsvariablen:

Definition 20

Für eine Zufallsvariable X nennen wir $\mathbb{E}[X^k]$ das **k -te Moment** und $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^k]$ das **k -te zentrale Moment**.

Der Erwartungswert ist also identisch zum ersten Moment, während die Varianz dem zweiten zentralen Moment entspricht.

5.3 Mehrere Zufallsvariablen

Beispiel 21

Aus einem Skatblatt mit 32 Karten ziehen wir zufällig eine Hand von zehn Karten sowie einen Skat von zwei Karten. Unter den Karten gibt es vier Buben. Die Zufallsvariable X zählt die Anzahl der Buben in der Hand, während Y die Anzahl der Buben im Skat angibt. Die Werte von X und Y hängen offensichtlich stark voneinander ab. Beispielsweise muss $Y = 0$ sein, wenn $X = 4$ gilt.

Wie kann man mit mehreren Zufallsvariablen über demselben Wahrscheinlichkeitsraum rechnen, auch wenn sie, wie im obigen Beispiel, sehr voneinander abhängig sind?

Wir untersuchen Wahrscheinlichkeiten der Art

$$\Pr[X = x, Y = y] = \Pr[\{\omega; X(\omega) = x, Y(\omega) = y\}].$$